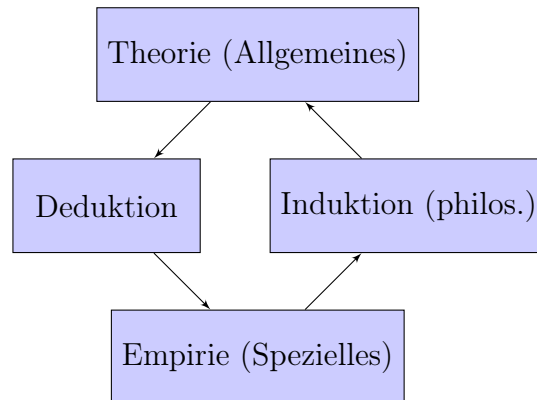


§1 Die Kunst des Schlussfolgerns

Einleitung: Was ist wissenschaftliches Denken?



Deduktion: Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere, d.h. Schlussfolgerung von gegebenen Prämissen auf logisch zwingende Konsequenzen, inklusive der formalen Ableitung von Ergebnissen (bzw. Herleitung) aus einer Theorie.

Induktion (philosophisch): Gewinnung von allgemeinen Erkenntnissen aus speziellen.

Theorie: Entwirft ein Bild eines Ausschnitts der Wirklichkeit, um diesen Teil der Wirklichkeit zu erklären.

Empirie: Die Sammlung/Erhebung von Informationen/Daten der Wirklichkeit, die beobachtet werden können in gezielten, systematischen Untersuchungen.

Die Mathematik gehört zu den nicht-empirischen Wissenschaften.

§1.1 Grundlagen der Logik

Definition 1: Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das wahr oder falsch sein kann.

Beispiel 1: Aussagen sind etwa: Es regnet. 3 ist eine gerade Zahl. Es gibt keine Känguruhs in Münster. Mathematik ist schwer zu erlernen. In Münster regnet es oder die Kirchenglocken läuten, und wenn beides gleichzeitig passiert, dann ist Sonntag.

Der Wahrheitsgehalt von Sätzen der Umgangssprache ist nicht immer leicht zu bestimmen, wie an diesen Beispielen zu sehen ist. Es gibt außerdem auch Aussagen, deren Wahrheitsgehalt unbekannt ist, wie etwa die folgende:

Beispiel 2: Jede natürliche gerade Zahl, die größer oder gleich 4 ist, ist Summe zweier Primzahlen. (Goldbachsche Vermutung seit 1742)

Bei manchen Aussagen kann auch angegeben werden, seit wann die Menschheit ihren Wahrheitsgehalt kennt, z. B.:

Beispiel 3: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat für $n \geq 3$ keine Lösungstriple im Bereich der natürlichen Zahlen. (Fermatsche Vermutung seit 1637, bewiesen seit 1993 durch A. Wiles und R. Taylor, veröffentlicht 1995, heute: "Satz von Fermat-Wiles")

Die letzte Aussage in Bsp. 1 zeigt, dass Aussagen mit "und", "oder" verknüpft werden können, um neue Aussagen zu erhalten. Durch Verneinung können ebenfalls neue Aussagen gebildet werden.

Um in der Mathematik mit ihren Aussagen und den zugehörigen Wahrheitsgehalten vernünftig arbeiten zu können, liegt es nahe, einige wenige Aussagen als kleinste wahre Grundbausteine anzunehmen (das sind dann die Prämissen bzw. die Axiome), und zu versuchen, alle weiteren daraus abzuleiten, wofür dann die Regeln der Logik verwendet werden. Damit ist es dann einigermaßen leicht zu bestimmen, ob etwas wahr oder falsch ist, im Gegensatz zu Sätzen der Umgangssprache, deren Wahrheitsgehalt von allerlei weiteren Gegebenheiten (aktuelles Wetter, subjektive Meinung...) abhängen kann.

Und: Am besten möchte man dabei mit möglichst wenig Axiomen auskommen!

Die Mathematik untersucht dabei abstrakte Strukturen an sich auf ihre Eigenschaften und Muster. Die Abstraktion ist dabei das A und O, denn viele Eigenschaften von Gebilden wiederholen sich. Es ist dann sinnvoll, gemeinsame Eigenschaften mit Namen zu versehen (mittels Definitionen), und dann weitere Eigenschaften abzuleiten, die dann all diesen Gebilden gemeinsam sind.

Doch als erstes überlegen wir uns, welche Verknüpfungen neuer Aussagen aus bestehenden Aussagen (nennen wir sie stellvertretend "A", "B", ...) gebildet werden können.

Definition 2: Die Verknüpfung zweier Aussagen A und B durch "und" und "oder" (w steht abkürzend für "wahr", f für "falsch"):

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Die Abkürzung $A \wedge B$ bedeutet hier A und B , die Abkürzung $A \vee B$ bedeutet A oder B .

Die Aussage $A \wedge B$ ist also genau dann wahr, wenn die beiden Aussagen A und B wahr sind, und sonst falsch. Die Aussage $A \vee B$ ist genau dann falsch, wenn beide Aussagen A und B falsch sind, und sonst wahr.

Für die Verneinung führen wir auch ein abkürzendes Symbol ein:

Definition 3: Die Aussage $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist. (Man sagt "nicht A " für $\neg A$.)

Beispiel 4:

- Die Aussagen $A \vee (\neg A)$ und $\neg(A \wedge \neg A)$ sind immer wahr.

- Durch Kombination von $\wedge, \vee, \neg$ kann eine Vielzahl weiterer Aussagen gebildet werden: $(A \wedge B) \vee (\neg C)$, $(A \vee B) \wedge C$, $(B \vee A) \wedge A, \dots$ Überlegen Sie sich, wie diese sprachlich ausgedrückt werden können, insbesondere wenn Sie A und B mit speziellen Aussagen belegen.
- Die Verknüpfung $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ kann man mit "entweder A oder B " ausdrücken.

Alle weiteren Verknüpfungen zweier Aussagen, die denkbar sind, können aus $\wedge, \vee$ und $\neg$ kombiniert werden.¹

Die wichtigste solche ist dabei die Schlussfolgerung, bzw. Folgerung oder auch Implikation genannt:

Definition 4: Eine Implikation ist eine Aussage, die wir als $A \Rightarrow B$ schreiben, und die – abhängig von zwei Aussagen A und B – den folgenden Wahrheitsgehalt hat:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wir sagen dafür auch "aus der Aussage A folgt die Aussage B ", oder kurz "aus A folgt B ". Diese Aussage ist wahr, wenn A und B wahr ist (aber auch, wenn A falsch ist!).

Schlussfolgern geht nun so: "Gilt $A \Rightarrow B$ und A , so folgt B ".

Das heißt: Ist A wahr und auch $A \Rightarrow B$, so ist auch B wahr. Mit "gilt..." bzw. "gilt die Aussage...", ist gemeint, dass man die Wahrheit der Aussage A *annimmt*. Aus dieser wird dann auf die Wahrheit von B geschlossen.

Man kann das auch so sehen: Ist $A \Rightarrow B$ wahr, so ist dies eine verwendbare *Schlussregel*. Gilt dann A (d. h. ist A wahr), so ist dann auch B wahr.

Man beachte dabei: $A \Rightarrow B$ ist stets wahr, wenn A falsch ist.

Es ist ein wichtiges logisches Prinzip, dass aus einer falschen Aussage A eine beliebige andere Aussage folgt: die Verknüpfung ergibt stets eine wahre Aussage ("ex falso quodlibet" = "aus Falschem folgt Beliebiges").

Bemerkung: Überlegen Sie sich, dass die Verknüpfung $(\neg A) \vee B$ denselben Wahrheitsgehalt hat wie die Aussage $A \Rightarrow B$. Wir können also die Implikation $A \Rightarrow B$ auch als Abkürzung für $(\neg A) \vee B$ verstehen.

Wichtige Dinge haben oft viele Namen. In einer Implikation $A \Rightarrow B$ nennt man A auch die hinreichende Bedingung für B , und B die notwendige Bedingung für A . Man sagt: A ist hinreichend dafür, dass B gilt, und B ist notwendig für die Gültigkeit von A . Auch "daraus folgt" kann für das Implikationszeichen gesagt werden. Die Hintereinanderreihung von mehreren Implikationen schreibt man auch einfach als $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \dots$ usw.

¹Diese Aussage müsste hier bewiesen werden. Vielleicht wagen Sie sich später mal selbst daran?

Definition 5: Die Rückrichtung einer Implikation $A \Rightarrow B$ ist die Implikation $B \Rightarrow A$.

Die Rückrichtung ist i. a. eine andere Aussage mit anderen Wahrheitswerten. Falls mit einer Implikation auch die Rückrichtung gilt, spricht man von Äquivalenz:

Definition 6: Die Äquivalenz zweier Aussagen A und B ist die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Man schreibt dafür abkürzend $A \Leftrightarrow B$. In einer Äquivalenz nennt man die Implikation $A \Rightarrow B$ die Hinrichtung, und $B \Rightarrow A$ die Rückrichtung der Äquivalenz.

Man formuliert eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ auch so: A ist genau dann wahr, wenn B gilt. Oder auch: A gilt genau dann, wenn B gilt. Das bedeutet, dass A und B bezüglich ihres Wahrheitsgehaltes die gleiche Aussage bezeichnen. Die Hintereinanderreihung mehrerer Implikationen schreibt man auch kurz als $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \dots$ usw.

Die wichtigsten Logikregeln beschreiben nun, wie Aussagen äquivalent umformuliert werden können (Regeln 1-4, 8 und 9) bzw. wie man mit gewissen Aussagen schließen kann (Regeln 5,6 und 7). Sie lassen sich durch Vergleich der jeweiligen Wahrheitswerte beweisen.

1	$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$
2	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
3	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
4	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
5	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$
6	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
7	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
8	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
9	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Zum Klammersetzen bei Formeln mit Aussagen: Klammern können weggelassen werden gemäß folgenden Regeln: $\neg$ bindet stärker als $\wedge$, $\wedge$ bindet stärker als $\vee$, und $\vee$ stärker als $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ bzw. $\Leftrightarrow$.
