**Definition 7:** Eine Behauptung ist die Kundgebung, dass eine Aussage wahr ist, unabhängig von ihrem Wahrheitsgehalt. Dass sie tatsächlich wahr ist, wird mit einem Beweis bestätigt. Ein Beweis ist dabei die (fehlerfreie) Herleitung der Wahrheit einer Aussage (aus Axiomen und bereits als wahr bewiesenen Aussagen).

**Definition 8:** Ein (mathematischer) Satz ist die Formulierung einer wahren (mathematischen) Aussage; meistens die Aussage, dass eine bestimmte Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist. Man nennt dann $A$ die Voraussetzung, und $B$ die Behauptung des Satzes.

In einem Satz wird also die Wahrheit einer Aussage behauptet, sofern sie bewiesen werden kann. Der Beweis steht meistens gleich im Anschluss an die Formulierung des Satzes; die Wahrheit eines Satzes muß nachvollziehbar sein. Wenn Sie ein ordentliches Mathematikbuch aufschlagen, wird dies dort so gemacht, meist als Trio "Definition–Satz–Beweis". Denn für neu definierte Begriffe wird meist ein Satz formuliert, der deutlich macht, dass die Definition ein sinnvolles Konzept darstellt. Die Mathematik kann so als Sammlung von Sätzen aufgefasst werden.

**Beispiel 5:** Ein Beispiel für einen Satz, wie er in einem Mathematik-Buch stehen könnte:

**Satz:** Voraussetzung: Sei $n$ eine gerade Quadratzahl. Behauptung: $n$ ist durch $4$ teilbar.
**Beweis:** Ist $n = m^2$ gerade, so ist $m$ durch $2$ teilbar, also $n = m \cdot m$ durch $4$ teilbar. □

Oft stehen die Worte *Voraussetzung* und *Behauptung* nicht mehr in der Formulierung im Satz dabei. Dann muss man sich selbst überlegen, was Voraussetzung und was Behauptung des Satzes ist.

**Beispiel 6:** Im vorigen Beispiel könnte der Satz auch heißen: "Gerade Quadratzahlen sind durch $4$ teilbar." Ein anderes Beispiel:
**Satz:** Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist halb so groß wie das Produkt zweier Seitenlängen.
Hier ist "Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck." die Voraussetzung, die Behauptung wäre: "Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks beträgt die Hälfte des Produkts zweier Seitenlängen."

---

Was ist nun genau ein Beweis? Wie leitet man die Wahrheit einer Aussage $B$ her? Und: wie schreibt man das auf?

Ein Beweis der Aussage $B$ könnte nun aus der Hintereinanderreihung von bereits bewiesenen Implikationen $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \cdots \Rightarrow C_{n+1} \Rightarrow B$ und einer schon bewiesenen Aussage $A$ bestehen. (Im Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ muss $A$ nicht bewiesen sein.) Bei einem solchen Vorgehen spricht man von einem direkten Beweis.

Ein spezieller Beweistyp ist der Induktionsbeweis und wird zu den direkten Beweisen gezählt. Wir werden ihn erst in §2.1 kennenlernen.

Ein weiterer Beweistyp, der zu den direkten Beweisen gezählt wird, ist der Ringsschluss und kommt seltener vor. Nämlich dann, wenn eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ von drei

Aussagen als Satz behauptet wird, genügt es, $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$ zu beweisen. Den Beweis der Rückrichtungen $A \Leftarrow B \Leftarrow C$ kann man sich dann sparen. (Mit mehr als drei Aussagen entsprechend.)

Alle anderen Beweisarten werden indirekt genannt. Das ist zum einen der Kontrapositionsbeweis, und zum andereren der Widerspruchsbeweis.

Beim Kontrapositionsbeweis wird anstelle von $A \Rightarrow B$ die gleichwertige[1] Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt gezeigt. Das Prinzip lässt sich auch als $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ schreiben, dieses ist oben als Logikregel Nr. 4 notiert.

Beim Widerspruchsbeweis wird aus $\neg B$ (der Annahme) eine falsche Aussage hergeleitet (ein sogenannter Widerspruch, wie etwa $0 = 1$, $A \wedge \neg A$ usw.). Nach dem Kontrapositionsprinzip ist $B$ dann wahr, also bewiesen.

Im häufigen Fall, dass der zu beweisende Satz eine Implikation $A \Rightarrow B$ als Aussage hat, lautet die Annahme $A \wedge \neg B$. Dann wird *daraus* eine falsche Aussage direkt hergeleitet. [2] Denn beachten Sie, dass $\neg(A \wedge \neg B) \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee (\neg(\neg B)) \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee B \;\Leftrightarrow\; (A \Rightarrow B)$.

Der Widerspruchsbeweis (zum Beweis einer Aussage $B$) wird so notiert, dass man die Annahme macht, dass $\neg B$ gelte. Nach der Herleitung eines Widerspruchs ist der Beweis dann beendet. Man schreibt dann auch, man erhält einen "Widerspruch". Gelegentlich schreibt man auch einen Widerspruchspfeil ("$\lightning$") an die erhaltene falsche Aussage.

In kurzen indirekten Beweisen kann man sprachlich den deutschen Konjuktiv II (="Irrealis") benutzen, mit dem im Deutschen etwas Irreales, insbesondere eine gemachte Annahme ausgedrückt wird. Bei längeren Beweisen tut man das eher nicht und drückt meistens nur die Annahme im Konjuktiv II (oder auch Konjunktiv I) aus, einfach weil sonst der Beweis beim Durchlesen zu künstlich wirkt.

**Beispiel 7:** Beispielsätze, die den Konjunktiv (II bzw. I) enthalten:

1. "Wenn Du früher aufgestanden wärest, hättest Du die Vorlesung nicht verpasst."
2. "Wenn ich ein Vöglein wär' und zwei Flüglein hätt', flög' ich zu Dir."
3. "Es sei $n$ eine gerade Zahl."
4. "Es gelte $X \subseteq Y$."

Der Konjunktiv I von "es gilt" und "es ist" lautet "es gelte" und "es sei".

Und: Zur Markierung des Endes eines Beweises schreibt man üblicherweise ein Kästchen an den rechten Seitenrand, oder die Abkürzung q.e.d. für "quod erat demonstrandum" = "wie zu beweisen war", auf deutsch auch "w.z.b.w.".

**Beispiel 8:** Beispiel für die Notierung eines Widerspruchsbeweises:

Satz: $p = 2$ ist die einzige gerade Primzahl.
Beweis (durch Widerspruch):
Annahme: Es sei $p > 2$ eine weitere gerade Primzahl. Dann ist $p$ durch 2 teilbar, also $p = 2 \cdot n$

[1] d. h. äquivalente

[2] Dieser Widerspruch kann auch $\neg A$ sein: dies ist ein Widerspruch, da man ja die Wahrheit von $A$ angenommen hat. In diesem Fall war der Widerspruchsbeweis dann doch ein Kontrapositionsbeweis und könnte auch so aufgeschrieben werden. Sogesehen ist ein Kontrapositionsbeweis nichts anderes als ein spezieller Widerspruchsbeweis.

mit einer natürlichen Zahl $n$. Da $p > 2$, ist $n > 1$, also ist $p$ eine zusammengesetzte Zahl im Widerspruch zur Annahme, dass $p$ eine Primzahl sei. □

Derselbe Beweis, etwas mehr in Formeln aufgeschrieben:
Bew.: Ann.: Sei $p \in \mathbb{P}$, $2|p$ und $p > 2$. Dann $\exists n \in \mathbb{N} : p = 2 \cdot n$. Dann ist $n > 1$, weil $p > 2$. Dann ist $p$ zusammengesetzt, $\lightning$. □

Eine letzte Bemerkung zum Thema Beweise: Der häufigste Fehler, den gerade Anfänger beim Beweisen machen, ist, die zu beweisende Behauptung $B$ im Beweisgang zu verwenden, was natürlich nicht erlaubt ist (das nennt man manchmal "Zirkelschluss", nicht zu verwechseln mit oben genanntem "Ringschluss"). Das passiert manchmal auch, ohne dass man es merkt, aber der Korrektor merkt es ganz bestimmt... Also seien Sie daraufhin wachsam!

## §1.2 Grundlagen der Mengenlehre

Der grundlegendste Begriff, mit dem Objekte und Strukturen der Mathematik (Zahlen, geometrische Gebilde, Abbildungen usw.) definiert werden können, ist der Mengenbegriff.

**Definition 9:** Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge.

Mengen können endlich oder unendlich sein. Endliche Mengen kann man, sofern sie nicht zuviele Elemente enthalten, durch *Aufzählung* ihrer Elemente angeben, üblicherweise in geschweiften Klammern wie etwa $\{3, 7, 2, 4\}$. Man beachte, dass $\{3, 7, 2, 4\} = \{3, 7, 2, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 7\}$: Zwei Mengen sind gleich genau dann, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Die Aussage, dass $x$ ein Element einer Menge $M$ ist, schreibt man als $x \in M$. Man schreibt $x \notin M$, wenn $x$ kein Element von $M$ ist, d. h. für die Aussage $\neg(x \in M)$.

Man kann eine Menge auch durch Beschreibung der *Eigenschaften* ihrer Elemente angeben: Ist $E(x)$ so eine Eigenschaft, so schreibt man für diese Menge $\{x|E(x)\}$. Formal ist $E(x)$ dabei eine Aussage, in der die Variable $x$ vorkommt – sie ist wahr genau für die Elemente der Menge. Statt dem senkrechten Strich machen manche Autoren übrigens auch gerne einen Doppel- oder Strichpunkt. Ich selbst bevorzuge den Strichpunkt, schreibe also lieber $\{x;\ E(x)\}$.

**Beispiel 9:** Ist $P(x)$ etwa die Eigenschaft "$x$ ist eine Primzahl", so ist

$$\{2, 3, 5, 7\} = \{x;\ P(x) \wedge (x < 10)\}$$

die Menge der Primzahlen, die kleiner als 10 sind.

Die Menge ohne Elemente heißt die leere Menge und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Achtung zum Umgang mit Mengen: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, ja für beliebige Mengen $M$ gilt $M \neq \{M\}$, d. h. Mengen sind zu unterscheiden von Mengen(systemen), die diese Mengen als Elemente enthalten können.

Mengen, die durch Aufzählung oder per Eigenschaft der Elemente gegeben sind, möchte man mit Namen/einer Abkürzung versehen ("definieren"). Dazu verwendet man das Definitionszeichen :=, wie z. B. in $M := \{2, 3\}$. Danach kann man abkürzend $M$ für die spezielle Menge $\{2, 3\}$ schreiben. Dabei darf das zu definierende Objekt nur auf der Seite des Doppelpunkts stehen, nicht auf der Seite des Gleichheitszeichens.

Möchte man Aussagen definieren, nimmt man entsprechend das Zeichen $:\Leftrightarrow$ wie z. B. in $A(x) :\Leftrightarrow x$ ist grün.

Damit kann man die Mengengleichheit definieren als:

$$M = N :\Leftrightarrow (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$$

---

Aussagen der Art $A(x)$, die von einer Variable $x$ abhängen, möchte man oft zu Aussagen der Art "für alle $x$ gilt $A(x)$" oder "es gibt ein $x$, für das $A(x)$ gilt" machen. Dafür benutzt man die Quantoren $\forall$ und $\exists$ ($M$ sei hier eine Menge):

$$\begin{aligned} (\forall x \in M : A(x)) &:\Leftrightarrow \text{ Für alle } x \in M \text{ gilt } A(x). \\ (\exists x \in M : A(x)) &:\Leftrightarrow \text{ Es gibt ein } x \in M, \text{ für das } A(x) \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Das ist ein sehr wichtiges und nützliches Konzept, um neue Mengen zu beschreiben bzw. neue Mengen zu bilden.

**Beispiel 10:** Ist $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, so ist die Menge $\{x \in \mathbb{N};\ \exists\, y \in \mathbb{N} : x = y^2\}$ genau die Menge der Quadratzahlen.

Behandelt man Mengen und ihre Elemente mit bestimmten Eigenschaften, kommt man schnell zum Begriff der Teilmenge.

**Definition 10:** Eine Menge $M$ ist Teilmenge einer Menge $N$ (in Zeichen schreibt man diese Aussage als $M \subseteq N$), falls jedes Element von $M$ auch eines von $N$ ist. Formal:

$$M \subseteq N :\Leftrightarrow (\forall x \in M : x \in N)$$

(Rechen-)Regeln zum Umgang mit Teilmengen:

| | |
|---|---|
| 1 | $M \subseteq M$ |
| 2 | $M \subseteq N \wedge N \subseteq M \Rightarrow M = N$ |
| 3 | $M \subseteq N \wedge N \subseteq L \Rightarrow M \subseteq L$ |

Beachten Sie auch, dass $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge $M$ gilt.

Weitere übliche Mengenverknüpfungen werden wie folgt definiert:

**Definition 11:**

Schnitt zweier Mengen $M$ und $N$: $M \cap N := \{x;\ x \in M \wedge x \in N\}$

Vereinigung zweier Mengen $M$ und $N$: $M \cup N := \{x;\ x \in M \vee x \in N\}$

Differenz von zwei Mengen $M$ und $N$: $M \setminus N := \{x;\ x \in M \wedge x \notin N\}$

Ist im letzten Fall $N \subseteq M$, so heißt $M \setminus N$ auch das Komplement von $N$ in $M$. Zu $M \setminus N$ sagt man auch "$M$ ohne $N$". Man sagt, $M$ und $N$ sind disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt. Die Vereinigung von disjunkten Mengen heißt disjunkte Vereinigung.

Wir formulieren jetzt Rechenregeln für Mengenverknüpfungen (seien $A, B, C$ Mengen):

| | |
|---|---|
| 1 | $A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A$ |
| 2 | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| 3 | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| 4 | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 5 | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| 6 | $A \cap A = A \cup A = A$ |
| 7 | $A \cap (A \cup B) = A$ |
| 8 | $A \cup (A \cap B) = A$ |

Woher weiß man nun, dass diese Regeln so stimmen? Man muss sie beweisen. Wir bringen hier exemplarisch den Beweis der 4. Regel, wie man ihn aufschreiben könnte:

**Beispiel 11:**
Satz: Voraussetzung: Seien $A$, $B$ und $C$ Mengen.
Behauptung: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$.
Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \text{ wegen obiger Logikregel Nr. } 8 \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Also sind die beiden Mengen in der Behauptung gleich. $\square$