Man verknüpft mit $\cap$ und $\cup$ auch oft mehr als zwei Mengen miteinander, sagen wir $A_1, \ldots, A_n$. Dann definiert man

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i := \{x;\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_i\}$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := \{x;\ \exists i \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_i\}$$

Hierfür sind auch die Bezeichnungen $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ bzw. $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ üblich.

Eine ganz spezielle Mengenverknüpfung ist die Produktbildung von Mengen:

Definition 12: Das Produkt zweier Mengen M und N ist die Menge $M \times N := \{(x, y);\ x \in M \wedge y \in N\}$.

Dies ist die Menge der geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$. Zwei Elemente (x, y) und (u, v) darin sind genau dann gleich, wenn $x = u$ und $y = v$ gilt. In Zeichen: $(x, y) = (u, v)$.

Nimmt man mehr als zwei Mengen, so nennt man die Elemente nicht mehr Paare, sondern Tupel. (Bei drei oder vier Mengen sagt man aber auch Tripel bzw. Quadrupel.)

Für mehrere Mengen $M_1, \ldots, M_n$ definiert man also

$M_1 \times \cdots \times M_n := \{(x_1, \ldots, x_n);\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \in M_i\}$.

Man schreibt weiter auch $M^n := M \times \cdots \times M$ (man nimmt n mal die Menge M und bildet das Produkt aus n-Tupeln).

Im Gegensatz zu Mengen kommt es bei Tupeln sehr wohl auf die Reihenfolge (und Wiederholung) der Elemente an:

Beispiel 12: Es ist $\{2, 4, 3\} = \{2, 3, 4\}$, aber $(2, 4, 3) \neq (2, 3, 4)$. Weiter ist $\{2, 3, 3\} = \{2, 3\}$, aber $(2, 3, 3) \neq (2, 3)$.

Beispiel 13: Bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen (s. später in §2.4), so kann man die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ anschaulich als ein kartesisches Koordinatensystem darstellen. Die Elemente $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ des $\mathbb{R}^2$ kann man als Punkte darin veranschaulichen, so, wie Sie das aus der Schule her kennen.

Das Arbeiten mit Quantoren bereitet Anfängern oft Schwierigkeiten, gerade wenn mehrere Quantoren im Spiel ist. Denn: Die Reihenfolge von Quantoren ist entscheidend! Vertauscht man Quantoren, entsteht normalerweise eine gänzlich andere Aussage:

Beispiel 14: Sei T die Menge aller Töpfe und D die Menge aller Topfdeckel. Für $t \in T$ und $d \in D$ sei eine Aussage $P(d, t)$ gegeben, denken Sie an "auf den Topf t passt der Deckel d". Das Sprichwort "Auf jeden Topf passt ein Deckel" kann man damit formal ausdrücken mit

$$\forall t \in T\ \exists d \in D : P(d, t).$$

Die Vertauschung der Quantoren, also

$$\exists d \in D\ \forall t \in T : P(d, t)$$

bedeutet etwas ganz Anderes, nämlich dass es einen Universaldeckel gibt, der auf jeden Topf passt. Im ersten Fall hängt d von t ab, im zweiten nicht.

Die Verneinung von Aussagen, die Quantoren enthalten, kommt häufig vor, und es ist nützlich und wichtig, die folgenden Regeln dafür zu kennen:

1	$\neg(\exists x \in M : E(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg E(x)$
2	$\neg(\forall x \in M : E(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg E(x)$

Kurz ausgedrückt: Durch Verneinung des All-Quantors entsteht der Existenzquantor und durch Verneinung des Existenz-Quantors der All-Quantor. Das funktioniert natürlich auch bei mehreren Quantoren:

Beispiel 15: Die Verneinung von "Auf jeden Topf passt ein Deckel" aus dem vorigen Beispiel ist

$$\neg(\forall t \in T \ \exists d \in D : P(d,t)) \Leftrightarrow (\exists t \in T \ \forall d \in D : \neg P(d,t))$$

In Worten: Nicht für alle Töpfe gibt es einen passenden Deckel bzw. es gibt einen Topf, auf den kein Deckel passt (also ein Gegenbeispiel zu dem Sprichwort).

Noch ein paar Tipps zum Beweisen von Aussagen mit Quantoren:

- Ist ein Satz zu beweisen, der eine Existenz-Aussage macht, kann der Beweis durch (ev. konstruktive) Angabe des Elements durchgeführt werden.
- Ist ein Satz zu beweisen, der eine All-Aussage macht, sagen wir für alle $x \in M$, so muss für ein beliebiges solches $x \in M$, das man sich beliebig, aber fest wählt, die Aussage verifiziert werden. Man könnte so vorgehen, der Reihe nach für alle $x \in M$ die Aussage zu zeigen, sofern M nicht zuviele Elemente hat. Oder man teilt M auf in geeignete Teilmengen und führt dann den Beweis nacheinander für die Elemente der Teilmengen. Man sagt dann, man macht eine Fallunterscheidung.
- Ist eine Aussage zu widerlegen, die eine All-Aussage ist, so genügt die (ev. konstruktive) Angabe eines Gegenbeispiels/eines Ausnahmeelements.
- Ist eine Aussage zu widerlegen, die eine Existenz-Aussage ist, so muss für jedes fragliche Element gezeigt werden, dass die Behauptung dafür nicht gilt.

§2 Die Zahlbereiche $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ und die Darstellung von Zahlen

Der Aufbau des Zahlensystems ist das Fundament der Arithmetik als Teilgebiet der Mathematik. Wir besprechen hier, wie im Prinzip das Zahlensystem axiomatisch aufgebaut werden kann, beginnend mit den natürlichen Zahlen: jeder Zahlbereich wird als Erweiterung des jeweils vorigen Zahlbereichs gewonnen. Dabei werfen wir auch ein Blick auf die Frage, wie Zahlen am besten und üblicherweise dargestellt werden (können).

Wir werden hier nicht alle Details besprechen, aber die wichtigsten Fakten nennen, auf die es ankommt und denen Sie später begegnen werden.

§2.1 Endliche Mengen und die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Beim Zählen werden Objekte zu Mengen zusammengefasst. Durch Abstraktion (gleiche Anzahl der Elemente zweier endlicher Mengen) gelangt man zum Begriff der natürlichen Zahl. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet, 1 ist die kleinste natürliche Zahl (gelegentlich nimmt man auch die 0 dazu, wir hier nicht).

Die heute übliche, axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen geht auf Peano zurück und kommt mit nur 5 Axiomen aus. Für uns ist hier nur das 5. Axiom interessant.

Bezeichnet man den Nachfolger einer natürlichen Zahl n mit $n+1$, so besagt das 5. Axiom (hier bezeichnet $E(x)$ eine beliebige Aussage, die von einer Zahl x abhängen kann):

$$\boxed{\forall E(x) : \Big(E(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (E(n) \Rightarrow E(n+1))\Big) \Rightarrow \big(\forall n \in \mathbb{N} : E(n)\big)}$$

Dieses 5. Peano-Axiom ist das Prinzip der vollständigen Induktion.

Es besagt (als Satz formuliert):

Satz 1. *(von der vollständigen Induktion):*
Vor.: Sei E eine Aussage über natürliche Zahlen wie folgt:

(1) Die Aussage E gilt für die natürliche Zahl 1.

(2) Gilt die Aussage E für die natürliche Zahl n, dann auch für ihren Nachfolger $n+1$.

Beh.: Die Aussage E gilt für alle natürlichen Zahlen.

Für die Beweistheorie bedeutet dies folgendes: Sind Sätze zu beweisen, die $E(n)$ für alle natürlichen Zahlen behaupten, so genügt es, erst $E(1)$ zu beweisen (Induktionsanfang), und dann aus der Annahme der Gültigkeit von $E(n)$ die Gültigkeit von $E(n+1)$ herzuleiten (Induktionsschritt, d. h. der Beweis der Implikation $E(n) \Rightarrow E(n+1)$). Dieses Beweisverfahren nennt man vollständige Induktion. Ein solcher Induktionsbeweis ist also zweiteilig, er besteht demnach aus zwei Beweisen, nämlich dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt.

Eine gemachte vollständige Induktion liefert dann sukzessive die Wahrheit aller Aussagen $E(n)$, einfach der Reihe nach:

$$\underbrace{E(1)}_{\text{Induktionsanfang}} \overset{\text{Ind.Schritt, } n=1}{\Rightarrow} E(2) \overset{\text{Ind.Schritt, } n=2}{\Rightarrow} E(3) \overset{\text{Ind.Schritt, } n=3}{\Rightarrow} E(4) \ldots$$

Dies ist lediglich eine Veranschaulichung der Induktion, kein Beweis. Wir akzeptieren die Induktion als Axiom, denn einen echten Beweis (etwa aus den anderen Axiomen) können wir nicht geben.

Mit dem Wort "Induktion" meint man in der Mathematik fast immer die vollständige Induktion in diesem Sinne.

Beispiel 16: Satz: Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.
Beweis: (Durch vollständige Induktion)
Induktionsanfang: Für $n = 1$ besteht die linke Seite der Gleichung nur aus dem einzigen

Summanden 1. Und dieser ist gleich 1^2, der rechten Seite der Gleichung.
Induktionsschritt: Sei die behauptete Gleichung wahr für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme). Zu zeigen ist, dass sie dann auch für den Nachfolger $n+1$ gilt. Dazu bilden wir die linke Seite der Gleichung mit $n+1$ anstelle von n und formen weiter um, bis wir die (für $n+1$) behauptete rechte Seite erhalten:

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = \underbrace{1+3+\cdots+(2n-1)}_{=n^2 \text{ unter Verwendung der Ind.-ann.}} +(2n+2-1)$$

$$= n^2+2n+1 \overset{\text{bin. Formel}}{=} (n+1)^2.$$

□

Damit haben wir bewiesen, dass $1 = 1^2$, $1+3 = 2^2$, $1+3+5 = 3^2$, $1+3+5+7 = 5^2$, $\ldots$, $1+3+5+\cdots+99 = 50^2$,… alles wahre Aussagen sind.

Beispiel 17: Derselbe Beweis, wie man ihn auch kürzer aufschreiben kann:
Beweis: (vollst. Ind.)
$\underline{n=1:}$ $l.S. = 1 = 1^2 = r.S.$
$\underline{n \to n+1:}$ $l.S. = 1+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) \overset{\text{Ind.ann.}}{=} n^2+2n+1 = (n+1)^2 = r.S.$ □
Bem.: Zur Verdeutlichung habe ich hier noch $l.S.$ und $r.S.$ für "linke Seite" und "rechte Seite" eingefügt. Das könnte man auch weglassen; es hilft aber, die Argumentation in so einer Kurzform zu verstehen. Versuchen Sie am Anfang, lieber lange Versionen wie im Bsp. davor aufzuschreiben; dann versteht Ihr Korrektor leichter, was gemeint ist.

Beispiel 18: Eine lehrreiche Übung ist die folgende: Versuchen Sie, auf dieselbe Weise mit vollständiger Induktion den folgenden Satz zu beweisen:
Satz: $\forall n, x \in \mathbb{N} : (1+x+x^2+\cdots+x^n)(x-1) = x^{n+1}-1.$

Nützlich am 5. Peano-Axiom ist auch, dass es sogenannte **Rekursive Definitionen** möglich macht. Was damit gemeint ist, werden wir im §3.2 kennen lernen.

Über die Peano-Axiome kann man auf den natürlichen Zahlen nun die Addition (+, d. h. "plus") und die Multiplikation ($\cdot$, d. h. "mal") definieren, so wie Sie sie aus der Schule kennen. Man definiert dabei $2 := 1+1$, $3 := 2+1$, $4 := 3+1$ usw. Man definiert weiter eine (nichtnatürliche) Zahl 0 durch die Eigenschaft $0+n = n+0 = n$, und schreibt $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dabei werden die bekannten Rechenregeln erfüllt, die man dann aus den Peano-Axiomen und der Definition von $+, \cdot$ herleiten (also beweisen) kann.[1]

Das schenken wir uns hier aber und verweisen auf den späteren Stoff der Anfängervorlesungen. Für uns sind + und $\cdot$ die gewöhnlichen Verknüpfungen, die wir unter "mal" und "plus" verstehen.

Die wichtigsten Rechenregeln fassen wir hier wie folgt in einer Tabelle zusammen (n, m und k seien beliebige natürliche Zahlen oder 0):

[1] Bemerkenswert, dass nur fünf Axiome dafür reichen!

	Addition	Multiplikation
1	$(n+m)+k = n+(m+k)$	$(nm)k = n(mk)$
2	$n+m = m+n$	$n \cdot m = m \cdot n$
3	$n+0 = 0+n = n$	$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$
4	$n+k = m+k \Rightarrow n = m$	$k \neq 0 \Rightarrow (nk = mk \Rightarrow n = m)$

Und eine Regel mit beiden Verknüpfungen:

5	$k(m+n) = km + kn$

(Malpunkte kann man weglassen, und beim Klammersetzen gilt: "mal" bindet stärker als "plus", so dass manche Klammern weggelassen werden können: Im Ausdruck $(n \cdot m) + k$ kann man die Klammern weglassen, nicht aber in $n \cdot (m+k)$.)

Natürlich kann man aus diesen Regeln wieder weitere herleiten usw. [2]

Wir gehen noch auf die sogenannte Ordnungsrelation $\leq$ ein: Man kann natürliche Zahlen ihrer Größe nach vergleichen bzw. anordnen. Wir definieren das Zeichen $\leq$ wie folgt für $n, m \in \mathbb{N}_0$:

Definition 13: $n \leq m :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : n + k = m, \qquad n \geq m :\Leftrightarrow m \leq n,$
$n < m :\Leftrightarrow n \leq m \wedge n \neq m, \qquad n > m :\Leftrightarrow n \geq m \wedge n \neq m.$

Folgende Aussagen mit Ungleichungen sind wahr (für alle $m, n, k \in \mathbb{N}_0$):

$m \leq m$
$m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$
$m \leq n \wedge n \leq k \Rightarrow m \leq k$

Zur Darstellung natürlicher Zahlen:

Wir schreiben natürliche Zahlen als Ziffernfolge im 10er-System auf, d.h., ist $g = 10$, so ist jede natürliche Zahl schreibbar als

$$a_k \cdot g^k + a_{k-1} \cdot g^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot g^1 + a_0$$

mit einem $k \in \mathbb{N}_0$ und $k+1$ vielen Ziffern $a_0, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Diese sogenannte g-adische Darstellung ist *eindeutig*, d. h. eine natürliche Zahl besitzt auch nur höchstens eine solche Darstellung. Und: Anstelle von $g = 10$ kann man jede andere natürliche Zahl > 1 zur Darstellung verwenden, Computer benutzen etwa $g = 2$. Man nennt g die Basis der g-adischen Darstellung. Bei $g = 10$ spricht man von Dezimaldarstellung, bei $g = 2$ von Dualdarstellung.

Man kann natürliche Zahlen auch als Produkt von kleinsten, nicht weiter zerlegbaren natürlichen Zahlen darstellen, den Primzahlen. Auch eine solche Darstellung ist eindeutig. Für die Zahlentheorie ist diese Darstellung mithilfe der Primfaktorzerlegung sehr wichtig, als praktische Methode aber völlig ungeeignet. Denn: die Primfaktorzerlegung

[2] z. B. die binomischen Formeln, wissen Sie noch, wie?

von Zahlen mit ein paar hundert Stellen ist rechnerisch bereits so schwer, dass Computer Jahrzehnte bräuchten, um diese zu berechnen. Diese Tatsache benutzt man heutzutage in der Verschlüsselungstechnik.

Nun möchte man im Bereich der natürlichen Zahlen auch das Zeichen $-$ "Minus" einführen. Dies macht man wie folgt.

Definition 14: Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Die Zahl $n - m$ sei diejenige Zahl in $\mathbb{N}_0$ (falls existent), für die $m + (n - m) = n$ ist.

Man muss sich zunächst überlegen, dass diese Definition *eindeutig* ist: Es kann höchstens eine Zahl in $\mathbb{N}_0$ mit dieser Eigenschaft geben.
Beweis: (durch Widerspruch)
Annahme: Seien $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ zwei verschiedene Zahlen mit dieser Eigenschaft, d.h. mit $m+k = n = m+\ell$. Aufgrund obiger Rechenregel Nr. 4 folgt daraus $k = \ell$, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

§2.2 Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen als Erweiterung von $\mathbb{N}$

Vorige Definition zeigt ein Problem mit den natürlichen Zahlen auf: "Minus" kann nicht uneingeschränkt gebildet werden; die hier beschriebene Zahl $n-m$ existiert ja nicht immer in $\mathbb{N}_0$, sondern genau dann, wenn $n \geq m$ ist.

Man hilft sich so aus: Wir definieren neue Zahlen hinzu: Ist $n \in \mathbb{N}$, schreiben wir das Symbol $-n$ als Abkürzung für $0 - n$ und erhalten so eine neue Menge

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Verknüpfungen "+" und "·" lassen sich auf $\mathbb{Z}$ erweitern, so dass alle bisher formulierten Rechenregeln dafür richtig bleiben. Auch die Regeln für die Ordnungsrelation bleiben gültig. Man nennt $\mathbb{Z}$ die Menge der <u>ganzen</u> Zahlen.

Es kommt eine neue wichtige Regel in $\mathbb{Z}$ hinzu, nämlich:

6	$\forall a, b \in \mathbb{Z}\ \exists c \in \mathbb{Z}:\ a + c = b$

Mengen mit einer Verknüpfung wie +, nämlich derart, dass die Regeln 1,3 und 6 dafür gelten, kommen in der Mathematik sehr häufig vor. Man abstrahiert und nennt eine solche Menge mitsamt der Verknüpfung eine <u>Gruppe</u>. Ein ganzer Zweig der Mathematik beschäftigt sich damit, nämlich die Gruppentheorie.

Somit ist auch "Minus" uneingeschränkt in $\mathbb{Z}$ möglich, und man sagt, "Minus" ist die Umkehrung von "+", da $a + (-a) = 0$ ist. Man nennt $-a$ das <u>Inverse</u> von a bzgl. +. Es gelten die dafür üblichen Rechenregeln, die Sie aus der Schule kennen. ("minus mal minus gibt plus" usw.)