## §2.3 Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen als Erweiterung von $\mathbb{N}$

(Fortsetzung)

Ähnlich wie für "Minus", fragt man sich nun, ob auch die Multiplikation eine Umkehrung besitzt. Man definiert die Division, d. h. "geteilt durch" entsprechend:

**Definition 15:** Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Die Zahl $a/b$ sei diejenige Zahl in $\mathbb{Z}$ (falls existent), für die $b \cdot (a/b) = a$ ist.

Auch das Zeichen $a : b$ ist gebräuchlich.

Wir haben in der Definition $b \neq 0$ gefordert. Da gibt es nämlich ein Problem, wenn $b = 0$ ist: Ist $b = 0$ und $a \neq 0$, kann es keine solche Zahl geben wie in Def. 16 verlangt wird. Ist hingegen $b = 0$ und $a = 0$, haben alle (!) ganzen Zahlen die verlangte Eigenschaft. Daher ist die Definition von $a/b$ nur sinnvoll, wenn $b \neq 0$ ist.

Die Zahl $a/b$ ist dann auch eindeutig, falls sie existiert. Der Beweis dafür geht analog[3] wie bei dem für $n - m$. Existiert die Zahl $a/b$, sagen wir, dass $b$ ein Teiler von $a$ ist, in Zeichen: $b|a :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a = cb$ für "$b$ teilt $a$".

## §2.4 Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen als Erweiterung von $\mathbb{Z}$

Auch bei der Division gibt es wieder das Problem, dass die Zahl $a/b$ nicht immer in $\mathbb{Z}$ existiert; sie existiert genau dann, wenn die entsprechende Division restfrei "aufgeht", eben wenn $b|a$ gilt.

Trotzdem: Wiederum kann durch Hinzufügen neuer Elemente zum bisherigen Zahlbereich erreicht werden, dass dann die Division (nahezu) uneingeschränkt möglich ist. Aber es ist etwas schwieriger.

Man könnte dies wieder versuchen, indem man die neuen Elemente $1/b$ nennt. Aber es müssen noch mehr dazu, etwa $2/b$, $3/b$, usw. Dann würde man also mindestens alle Elemente der Form $a/b$ dazunehmen; allerdings kann mit dieser Darstellung keine Eindeutigkeit mehr erreicht werden, da ja $a/b = (ca)/(cb)$ für alle $c \in \mathbb{N}$ gilt (jedenfalls dann, wenn die Division $a/b$ aufgeht; aber auch sonst sollte diese Regel richtig sein).

Der neue Zahlbereich soll ja auch wieder in erster Linie eine Menge sein, und bei der Definition einer Menge spielt es keine Rolle, ob manche Elemente mehrfach genannt werden. Man schreibt also $\frac{a}{b}$ für $a/b$, nennt dieses Symbol einen Bruch, $a$ den Zähler, $b$ den Nenner des Bruches, und definiert folgende Menge aller Brüche:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Diese Menge heißt die Menge der rationalen Zahlen. Die Gleichheit zweier Brüche ist wie folgt definiert:

[3] d.h. nach nötigen Änderungen beim Aufschreiben *genauso*

**Definition 16:** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} :\Leftrightarrow ad = cb$

Man erreicht dennoch eine eindeutige Darstellung für eine rationale Zahl als Bruch, wenn man zu dem entsprechenden gekürzten Bruch übergeht:

**Definition 17:** $a$ und $b$ heißen teilerfremd, falls $\forall c \in \mathbb{N}: \; c|a \wedge c|b \Rightarrow c = 1.$

**Übung:** Bilden Sie die Verneinung, d. h. schreiben Sie in Formeln auf, was "nicht teilerfremd" bedeutet.

**Satz 2.** *Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gibt es ein Paar $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ so, dass $x = \frac{a}{b}$ gilt und so, dass $a$ und $b$ teilerfremd sind. Diese Darstellung ist eindeutig. (Man nennt diese gekürzt.)*

**Beweis:**
Existenz: Ist $x = \frac{a}{b}$ eine rationale Zahl, so definieren wir $c$ als die größte natürliche Zahl, die $a$ und $b$ teilt (die gibt es und ist eindeutig...). Dann ist $\frac{a/c}{b/c}$ ein gekürzter Bruch und gleich $x$.
Eindeutigkeit: Wir betrachten die Darstellung $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$ mit zwei gekürzten Brüchen und zwei je teilerfremden Paaren $(a, b), (u, v)$. Dann ist $av = bu$. Daraus folgt $v|b$ und $b|v$ wegen der Teilerfremdheitsbedingungen, also $v = b$, und analog folgt $a = u$. $\square$

---

Für die rationalen Zahlen gibt es nun wieder die Rechengesetze wie oben für $+$ und $\cdot$. Dabei muss jetzt aber gesagt werden, wie man "$+$" und "$\cdot$" für rationale Zahlen definiert, die insbesondere keine ganzen Zahlen sind. Das geht so:

**Definition 18:**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{u}{v} := \frac{au}{bv}, \quad \frac{a}{b} + \frac{u}{v} := \frac{av + ub}{bv}$$

Bei dieser Definition ist es egal, mit welchem Zähler und Nenner Sie die beiden rationalen Zahlen linkerseits darstellen, die hier definierte Summe bzw. das Produkt ergibt immer dasselbe Ergebnis. Man sagt dann auch, die Addition bzw. Multiplikation ist "wohldefiniert", d. h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten (also Paare aus Zähler und Nenner), mit denen Sie die rationalen Zahlen darstellen.

Nun kommt ein neues Rechengesetz hinzu:

| 6' | $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x \neq 0 \; \exists z \in \mathbb{Q}: \; xz = y$ |
|---|---|

$\mathbb{Q}$ ist ein einfaches Beispiel für einen Körper, dies bezeichnet in der Mathematik eine Menge mit zwei Verknüpfungen, so dass alle bisher genannten[4] Rechengesetze gelten. Die Menge $\{0, 1\}$ stellt mit den richtigen Definitionen für die beiden Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" den kleinstmöglichen Körper dar. Es gibt Körper mit 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11,... Elementen[5], aber auch Körper mit unendlich vielen Elementen, von denen Sie im Moment gar nicht ahnen, dass es sie gibt: Es gibt z. B. Körper, deren Elemente Funktionen sind. Solche werden Sie in Ihrem Studium sicher kennenlernen.

[4] außer den Regeln für die Ordnungsrelation, die zählt man nicht zu den Körperaxiomen.
[5] hier ist für Sie wohl nicht zu sehen, wie diese Zahlenfolge gebildet wird...

Wie kann man rationale Zahlen geeignet darstellen? Und wie kann man ihre Größe vergleichen? Bei der Bruchdarstellung kann man die Ordnungsrelation $\leq$ für rationale Zahlen wie folgt definieren und somit Größenvergleiche machen:

**Definition 19:**

$$\frac{a}{b} \leq \frac{u}{v} :\Leftrightarrow av \leq ub$$

Trotzdem ist dies im täglichen Leben nicht so praktisch, weil man dann immer rechnen muss, wenn man die Größe zweier Brüche vergleichen möchte.

Nun, im alten Ägypten hat man positive rationale Zahlen immer als Summe von Stammbrüchen der Form $\frac{1}{b}$, $b \in \mathbb{N}$, dargestellt. Diese ägyptische Darstellung ist tatsächlich sehr effektiv, da immer nur wenige Stammbrüche als Summanden reichen[6]. Aber Größenvergleiche sind auch damit schwierig.

Um heutzutage Brüche schnell vergleichen zu können, stellen wir auch rationale Zahlen $g$-adisch dar, nämlich für $g = 10$ als sogenannte Dezimalbrüche in der Form:

$\pm a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, b_0 b_1 b_2 \dots$, die $a_i, b_j$ sind hier alles Ziffern.

Wie man diese Ziffern durch ein Divisionsverfahren bekommt, das kennen Sie vermutlich noch aus der Schule, das will ich hier nicht nochmal aufrollen.

Man hat dann stets endlich viele Ziffern vor dem Komma, und unendlich viele Ziffern nach dem Komma. Die Ziffernfolge nach dem Komma wird aber irgendwann periodisch, d. h. ab einer Stelle wiederholt sich eine endliche Ziffernfolge immer wieder.[7] Besteht diese sich wiederholende Ziffernfolge aus 0, d. h. kommen nur noch Nullen am Ende, sagt man auch, der Dezimalbruch ist endlich oder bricht ab.

Bei zwei rationalen Zahlen, die derart als Dezimalbruch gegeben sind, kann man dann durch Vorzeichen- und Ziffernabgleich ganz leicht bestimmen, welche Zahl die größere und welche die kleinere ist.

Aber es gibt ein Problem mit dieser Darstellung, die vielen nicht bewusst ist: Sie ist *nicht* eindeutig, d. h. es gibt rationale Zahlen, die mehrere verschiedene Dezimaldarstellungen haben können:

Es ist nämlich

$$0,999999999\cdots = 1,00000\dots \qquad \text{(Beweis davon in §3.3)}$$

und entsprechend ist auch jeder Dezimalbruch, der irgendwann nur noch Neunen als Endziffern hat, gleich demjenigen, der entsteht, wenn man die Neunen abschneidet und die dann letzte Ziffer um 1 erhöht (die Gleichung $0,9999\cdots = 1$ kann man ja mit passender 10er Potenz $10^a$, $a \in \mathbb{Z}$, multiplizieren und zum abgeschnittenen Dezimalbruch dazuaddieren bzw. subtrahieren, falls dieser negativ ist).

Das ist tatsächlich aber auch die einzige Uneindeutigkeit, die bei Dezimalbrüchen vorkommen kann[8]; damit kann man gut leben, ohne dass dies ein wirkliches Problem ist.

[6] Man vermutet, dass man stets mit höchstens 3 Stammbrüchen auskommt; die Frage ist bis heute offen.

[7] Das dies so ist, beweist man typischerweise in einer Zahlentheorie-Vorlesung.

[8] auch das wird eher in einer Zahlentheorie-Vorlesung bewiesen

Was hingegen wirklich zu einem Problem wird, ist, wenn man versucht, Gleichungen wie $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ zu lösen[9]. Weil $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, können wir zwar wunderbar Gleichungen der Art $x + y = z$ oder $x \cdot y = z$ nach $x$ auflösen. Bei Gleichungen wie $x^2 = 2$ geht das aber nicht so leicht; man kann sogar leicht beweisen, dass das gar nicht geht:

**Satz 3.** *Die Gleichung $x^2 = 2$ hat keine Lösung für $x$ mit $x \in \mathbb{Q}$.*

**Beweis:** Annahme: $x \in \mathbb{Q}$ sei eine Lösung der Gleichung. Sei etwa $x = \frac{a}{b}$ die gekürzte Darstellung mit einem $a \in \mathbb{Z}$ und einem $b \in \mathbb{N}$, die teilerfremd sind. Dann ist also

$$2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ also } 2b^2 = a^2.$$

Also ist 2 ein Teiler von $a^2$ und damit auch von $a$, also folgt $a = 2u$ für ein $u \in \mathbb{N}$. Aus der Gleichheit $2b^2 = a^2$ folgt dann weiter $2b^2 = 4u^2$, also $b^2 = 2u^2$. Aber dann muss auch $b$ durch 2 teilbar sein, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von $a$ und $b$. ↯ □

Na sowas: die Gleichung $x^2 = 2$ hat also keine Lösung in $\mathbb{Q}$, andererseits kann man mit rationalen Zahlen einer womöglichen Lösung beliebig nahekommen: $1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$ Offenbar müssen wir an dieser Stelle von einer "Lücke" in $\mathbb{Q}$ sprechen. Wir möchten all solche Lücken in $\mathbb{Q}$ am liebsten gleich vollständig stopfen. Am besten so, dass man bei all möglichen Approximationen (Grenzwertbildungen) einen Grenzwert bekommen kann.

## §2.5 Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als Erweiterung von $\mathbb{Q}$

Dazu erweitert man den Zahlbereich wiederum von neuem. Es gibt nun mehrere Möglichkeiten, wie dazu in einer Analysis I-Vorlesung vorgegangen werden kann:

1. Man kann die Menge aller unendlichen Dezimalbrüche, auch die nichtperiodischen, als Menge reeller Zahlen $\mathbb{R}$ definieren. Dann muss man die Eigenschaft, die $\mathbb{R}$ gegenüber $\mathbb{Q}$ auszeichnet, nämlich die sogenannte <u>Vollständigkeit</u>, beweisen, was einigermaßen umständlich und schwierig ist.

2. Man definiert die Menge der reellen Zahlen als Menge von sogenannten <u>Dedekindschen Schnitten</u>. Dann ist die Vollständigkeit zwar leichter zu beweisen, aber die Definition von $\mathbb{R}$ ist dann nicht mehr ganz so intuitiv wie die Definition mit den Dezimalbrüchen.

3. Man definiert die Menge der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen. Dieser abstrakte Zugang ist dann für die meisten HörerInnen sehr schwierig zu verstehen und denkbar unintuitiv. Er hat aber den Vorteil, dass die Vollständigkeit aufgrund der Konstruktion quasi mitgeliefert wird, ohne dass man dazu noch groß was beweisen müsste. Außerdem wird diese Konstruktion in späteren Vorlesungen auch mit anderen Mengen gemacht ("Vervollständigung").

4. Man stellt sich auf den axiomatischen Standpunkt und sagt, die Menge der reellen Zahlen ist ein Körper mit Ordnungsrelation, der die Vollständigkeitseigenschaft hat. Neben den Körper- und Ordnungsaxiomen notiert man die Vollständigkeitseigenschaft als weiteres Axiom, das sogenannte <u>Vollständigkeitsaxiom</u>. Dann kann man alle weiteren Eigenschaften über die reellen Zahlen daraus herleiten. Dass es die reellen Zahlen auch wirklich

[9] hier ist $x^2 := x \cdot x$

gibt, ist damit aber noch nicht gesagt; erst die Konstruktion (wie etwa über Dezimalbrüche, Dedekind-Schnitte oder Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen) zeigt dies: Man muss nachweisen, dass die konstruierten Zahlen alle $\mathbb{R}$-Axiome erfüllen, womit eigentlich keine Arbeit im Vergleich zu den anderen Zugängen gespart wurde. Viele Dozenten sparen sich diese Arbeit dann meistens trotzdem aus Zeitgründen.

Die erwähnte Vollständigkeitseigenschaft bzw. das Vollständigkeitsaxiom besagt nun:

**Satz 4.** *(Vollständigkeitsaxiom) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $M$ von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke $z \in \mathbb{R}$, d. h. diese liegt in $\mathbb{R}$.*

Um zu verstehen, was das heißt, müssen wir erstmal die hier vorkommenden Begriffe erklären:

**Definition 20:** Eine Teilmenge $M$ einer Menge $K$, die eine Ordnungsrelation $\leq$ besitzt, heißt <u>nach oben beschränkt</u>, wenn es ein $y \in K$ gibt mit

$$\forall x \in M: \; x \leq y.$$

Die Zahl $y$ heißt dann <u>obere Schranke</u> von $M$.

Mit anderen Worten: Es existiert eine obere Schranke $y$ für alle Elemente von $M$.

Die kleinste obere Schranke von $M$ ist eine Schranke $z$ von $M$, die durch die Eigenschaft

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in M : z - \varepsilon < x$$

gekennzeichnet ist. (Die Zahl $z$ ist das Minimum aller oberer Schranken: Es wird ausgedrückt, dass es keine kleinere obere Schranke gibt.) Das Axiom besagt also, dass so ein $z$ eine reelle Zahl ist. Sie ist dann auch eindeutig bestimmt; man nennt sie <u>Supremum</u> von $M$. (Bemerkung: Verwechseln Sie das Supremum von $M$ nicht mit dem Maximum von $M$, das das größte Element in $M$ bezeichnet.)

Inwiefern löst diese Vollständigkeitseigenschaft nun unser Ausgangsproblem $x^2 = 2$?

Nun, betrachtet man die (etwa durch $y = 2$ nach oben beschränkte) Menge $M = \{x \in \mathbb{Q};\; x^2 \leq 2\}$, so hat laut Axiom diese Menge eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{R}$ (aber nicht in $M$!), nennen wir diese $z$. (Wir identifizieren $z$ dann mit dem unendlichen Dezimalbruch $1,4142\ldots$.)

Die reelle Zahl $z$ ist nun gleich der positiven Lösung von $x^2 = 2$, die wir mit dem Symbol $\sqrt{2}$ bezeichnen. (Ein Wurzelsymbol bezeichnet immer eine Lösung der entsprechenden Gleichung.)

**Beweis:** Aus der Supremumseigenschaft von $z$, nämlich

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in M : z - \varepsilon < x$$

folgt (herleitbar aus untigen Rechenregeln für die Ordnungsrelation):

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in M : \; \underbrace{(z-\varepsilon)^2}_{=z^2-2z\varepsilon+\varepsilon^2} < x^2.$$

Mit $\varepsilon > 0$ durchläuft auch $2z\varepsilon - \varepsilon^2$ alle nicht zu großen positiven reellen Zahlen $\delta$. Es folgt:

$$\forall \delta > 0 \; \exists x \in M : z^2 - \delta < x^2,$$

d. h. die Menge $\{x^2 \in \mathbb{R};\ x \in M\}$ hat also die kleinste obere Schranke $z^2$, andererseits ist die kleinste obere Schranke dieser Menge offensichtlich $= 2$, so dass $z^2 = 2$ folgt. □

Die Vollständigkeitseigenschaft ist nun die Grundlage, warum die ganze Analysis, die sich jetzt als Theorie der Grenzwertbildungen entpuppt, überhaupt in $\mathbb{R}$ funktioniert: Erst die Vollständigkeit macht es möglich, darin mit Grenzwerten zu arbeiten. Und will man sonst mit Grenzwerten arbeiten, geht man eben zur Vervollständigung über.[10]

Können wir dann alle möglichen Gleichungen lösen?

Antwort: Nein, Gleichungen wie $x^2 = -1$ können in $\mathbb{R}$ nicht gelöst werden. Denn wegen der Ordnungsrelationsrechenregel Nr. 3 unten ist $x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wiederum kann der Zahlbereich $\mathbb{R}$ erweitert werden, um dieses Problem in den Griff zu bekommen. Das machen wir aber erst später in §5, wenn wir $\mathbb{R}$ etwas mehr untersucht haben.

Ist $\mathbb{R}$ die kleinstmögliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$?

Antwort: Nein, wenn Sie das Vollständigkeitsaxiom ignorieren und stattdessen Lösungen von einzelnen Gleichungen wie $x^2 = 2$ zu $\mathbb{Q}$ geeignet hinzunehmen, lassen sich unendlich viele Zwischenkörper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ konstruieren. Das lernt man später in Algebra.

---

[10] Äquivalent zur Vollständigkeitseigenschaft ist übrigens die Aussage "Alle Cauchyfolgen haben einen Grenzwert in $\mathbb{R}$".