§2.5 Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als Erweiterung von $\mathbb{Q}$

(Fortsetzung)

Wir wollen nun weiter mit $\mathbb{R}$ rechnen und definieren noch, was Potenzen und Wurzeln sind, sowie geben ein paar Regeln der Potenzrechnung:

Definition 21: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man die n-te Potenz von a als $a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}}$, sowie $a^0 := 1$. Eine 2-te Potenz heißt auch Quadrat.

Für eine negative ganze Zahl $-n$, wenn $n \in \mathbb{N}$ ist, definieren wir $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$. Ist $x = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$, definieren wir $a^x := \sqrt[k]{a^m}$ als diejenige nichtnegative reelle Zahl y, für die die Gleichung $y^k = a^m$ gilt (falls y existiert). Das Symbol $\sqrt[k]{}$ heißt k-te Wurzel. In einer Potenz a^r heißt a die Basis, und r der Exponent.

Hier die wichtigen Regeln der Potenzrechnung: ($a \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{Q}$)

1	$a^x a^y = a^{x+y}$
2	$(ab)^x = a^x b^x$
3	$(a^x)^y = a^{xy}$
4	$a > 1 \Rightarrow (x < y \Leftrightarrow a^x < a^y)$

Achtung: $a^{(x^y)}$ ist fast immer eine andere Zahl als $(a^x)^y$. Z. B. ist $2^{(2^3)} = 2^8$, aber $(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6$. Lässt man die Klammern weg und schreibt a^{x^y}, so meint man damit den Ausdruck $a^{(x^y)}$.

Und wie definiert man Potenzen für reelle Hochzahlen? Also a^x für $a, x \in \mathbb{R}$?

Antwort: Das kann man auch über ein Supremum bzw. Grenzwert definieren. Wir benutzen dafür aber später die Exponentialfunktion, mit der das sehr elegant geht. Damit kann man dann auch Gleichungen vom Typ $a^x = y$ nach a auflösen, sofern a und y nichtnegativ sind. Auch eine Auflösung nach x wird dann möglich sein. Das machen wir in §3.3.

Bevor wir mit der Grenzwerttheorie in $\mathbb{R}$ loslegen können, brauchen wir noch Begriffe und Rechenregeln dafür. Wir wollen ja sagen können, was "immer näher" heißt, also Abstände messen können. Dafür greifen wir auf die Ordnungsrelation und ihre Rechenregeln zurück. Außerdem wird der Vollständigkeitsbegriff ja über die Ordnungsrelation definiert, deshalb braucht man auch ständig Rechenregeln für die Ordnungsrelation ("abschätzen..."), die Wichtigsten geben wir hier an: ($a, b, x, y \in \mathbb{R}$)

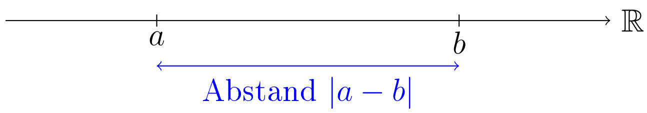
1	$x \leq y \Leftrightarrow (x < y \vee x = y)$
2	$x \leq y \wedge a \leq b \Rightarrow a + x \leq b + y$
3	$x \leq y \wedge a \geq 0 \Rightarrow a \cdot x \leq a \cdot y$
4	$x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
5	$0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

Definition 22: Der Betrag $|a|$ einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist wieder eine reelle Zahl und ist definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Definition 23: Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so bezeichnet $|a - b|$ den Abstand der beiden reellen Zahlen.

Abstände sind immer ≥ 0. Die reelle Zahl $|a - b|$ ist gerade der Abstand der zu a und b gehörigen Punkte auf der reellen Zahlengerade. Man veranschaulicht $\mathbb{R}$ nämlich gerne als Zahlenstrahl:



Oftmals stellt man sich reelle Zahlen am besten als Punkte auf dem Zahlenstrahl vor.

Für den Betrag gelten die folgenden Rechenregeln: $(a, b \in \mathbb{R})$

1	$-\lvert a\rvert \leq a \leq \lvert a\rvert$
2	$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$
3	$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$
4	$\lvert a\rvert \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
5	$\lvert a + b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$

Die Regel Nr. 4 gilt hier auch mit $<$ statt $\leq$.

Die letzte Ungleichung, Regel Nr. 5, heißt Dreiecksungleichung.

Spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle, die wir wie folgt definieren:

Definition 24: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann ist

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\; a \leq x \leq b\} \text{ ein abgeschlossenes Intervall,}$$
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\; a < x < b\} \text{ ein offenes Intervall.}$$

Entsprechend definiert man auch halboffene Intervalle $(a, b], [a, b)$. Abkürzend schreibt man

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}, \qquad (b, \infty) := \{x \in \mathbb{R};\ x > b\}$$

usw. Beachten Sie dabei, dass die Symbole $\pm\infty$ hierbei nicht als Zahlen verstanden werden dürfen.

Zum Arbeiten/Rechnen mit Intervallen und Beträgen ist die folgende Übung als Einstieg lehrreich:

Beispiel 19: Schreiben Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen und beweisen Sie Ihre Behauptung:

(a) $\{x \in \mathbb{R};\ |x| < 3\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R};\ |4x| > 1\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R};\ |1 + x| \leq 2\}$

(d) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 7\}$

(e) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |2x - 4| \geq 5\}$

(f) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |-x^2 + 1| \geq 2\}$

(g) $\{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R};\ |x - 1| \leq 2\}$

(Sie können diese Teilmengen von $\mathbb{R}$ auch zeichnerisch am Zahlenstrahl darstellen.)

Als Beispiel zeigen wir, wie man die Lösung von (c) aufschreiben kann:

Beh.: Es gilt $\{x \in \mathbb{R};\ |1 + x| \leq 2\} = [-3, 1]$.

Bew.: Es ist

$$\begin{aligned} |1 + x| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq 1 + x \leq 2 \text{ nach Betragsregel Nr. 4} \\ &\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]. \end{aligned}$$

$\square$

§3 Abbildungen, Funktionen, Folgen und Grenzwerte

§3.1 Abbildungen und Funktionen

Wir beginnen mit folgender Definition:

Definition 25: Seien A, B Mengen. Eine <u>Abbildung</u> von A nach B ist eine Teilmenge f der Produktmenge $A \times B$ derart, dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$. Man schreibt dann $y = f(x)$ sowie $f : A \to B, x \mapsto f(x)$.

Man nennt dann $f(x)$ das <u>Bild</u> bzw. <u>Wert</u> von x unter der Abbildung f, B den <u>Bild-</u> oder <u>Wertebereich</u>, und A den <u>Definitionsbereich</u> der Abbildung f. Die Menge der $x \in A$ mit $f(x) = y$ heißt die <u>Urbildmenge</u> von y unter der Abbildung f. Für die Elemente von A und B sagt man in diesem Zusammenhang auch gerne "Punkte".

Denken Sie bei einer Abbildung an eine Zuordnung bzw. an eine Funktion, wie Sie diese schon in der Schule kennengelernt haben. Die Notation $f : A \to B, x \mapsto f(x)$ haben Sie vermutlich dort gesehen. Wichtig ist, dass auch wirklich *jedem* $x \in A$ ein $f(x) \in B$ zugeordnet werden kann. Nicht alle $z \in B$ müssen dabei getroffen werden; falls doch, nennt man die Abbildung surjektiv. Und nicht jedes Paar $x, y \in A$, $x \neq y$, muss verschiedene Bilder in B haben; falls doch, d. h. wenn

$$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

gilt, nennt man die Abbildung injektiv. Ist eine Abbildung gleichzeitig surjektiv und injektiv, heißt sie bijektiv.

Tatsächlich haben wir bereits schon viele Abbildungen betrachtet: Ist $\mathcal{A}$ eine (geeignete) Menge von Aussagen, so kann man $\wedge, \vee, \neg$ als Abbildungen $\wedge, \vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bzw. $\neg : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ auffassen. Man kann auch eine Wahrheitswertabbildung $w : \mathcal{A} \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ betrachten; all das ist denkbar. Und unsere Verknüpfungen "$+$" und "$\cdot$" sind Abbildungen der Art $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Ordnungsrelation ist eine Abbildung der Art $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{A}$.

Funktionen nennt man insbesondere Abbildungen, deren Wertebereich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ ist. Aber auch sonst sprechen Autoren von einer Funktion, wenn eine Abbildung vorliegt; das kommt ganz auf den Kontext an. Die Bildpunkte $f(x)$ nennt man dann auch Funktionswerte.

Beispiele für Funktionen sind (hier ist $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ usw.):

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := x^2$,
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto f(x) := x^2$,
- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto f(x) := \sqrt{x}$,
- $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto f(x) := 2^x$

Die Begriffe injektiv und surjektiv werden häufig benutzt. Die Urbildmenge eines Punktes $z \in B$ kann leer sein, dann ist die Abbildung nicht surjektiv. Und unter einer injektiven Abbildung werden Punkte $z \in B$ von höchstens einem Urbildpunkt getroffen, d. h. die Urbildmenge ist dann einelementig oder leer. Wird *jeder* Punkt $z \in B$ von genau einem Urbildpunkt getroffen, ist die Abbildung bijektiv. Dann stehen Punkte mit ihren Bildpunkten in eineindeutiger Beziehung zueinander: Jedem Punkt ist genau ein Bildpunkt zuzuordnen, aber auch umgekehrt. (Dann gibt es auch eine zugehörige Umkehrabbildung g, die über die Eigenschaft $\forall\, x \in A : g(f(x)) = x$ definiert ist; für diese gilt ebenso $\forall\, y \in B : f(g(y)) = y$.)

Sie können bei obigen Beispielen mal überlegen, welche Funktionen injektiv, surjektiv, bijektiv sind; insbesondere, wenn Sie statt der Bild- und Definitionsbereiche Intervalle oder andere Mengen reeller Zahlen untersuchen. Was sind die Umkehrabbildungen in den Beispielen, wo eine Bijektion vorliegt? Machen Sie sich die Begriffe auch in Beispielen mit endlichen Bild- und Definitionsbereichen bewusst.

Man nennt eine Menge M abzählbar unendlich, falls es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt. Ein Beispiel ist die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen; es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie man eine solche Abbildung f angeben kann, also eine "Abzählung" f. Die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ hingegen ist ein Beispiel für eine überabzählbar unendliche Menge, d. h. $\mathbb{R}$ kann prinzipiell nicht abgezählt werden.

Dies beweist man mit folgendem Widerspruchsbeweis: Angenommen, man hätte die reellen Zahlen im Intervall $(0, 1)$ durchgezählt als $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Die Dezimaldarstellung (ohne 9er-Periode) der Zahl x_n sei $0, x_{n,1}x_{n,2}x_{n,3}\ldots$; die $x_{n,i}$ stellen dabei Ziffern von 0 bis 9 dar. Man betrachte nun eine reelle Zahl a, die $0, a_1a_2a_3\ldots$ als Dezimaldarstellung hat und für die $a_1 \neq x_{1,1}$, $a_2 \neq x_{2,2}$, $a_3 \neq x_{3,3} \ldots$ gilt; so eine Zahl a ist leicht zu konstruieren: Die Ziffer a_i definiere man als irgendeine Ziffer [11] außer $x_{i,i}$ und außer 9. Durch Ziffernabgleich ist zu sehen, dass die Zahl a dann nicht in der Auflistung $x_1, x_2, x_3, \ldots$ vorkommen kann, im Widerspruch zur Annahme, dass die Auflistung $x_1, x_2, \ldots$ bereits *alle* reellen Zahlen im Intervall $(0, 1)$ aufzählt. (Dieser Beweis ist als (zweites) Cantorsches Diagonalargument bekannt.)

§3.2 Folgen und Summen

Unsere Annäherung an $\sqrt{2}$ mit Dezimalbrüchen am Ende von §2.4 ist bereits ein Beispiel für eine (Zahlen-)folge. Wir wollen jetzt über Grenzwerte von Folgen sprechen. Mit dem Abbildungsbegriff können wir den Begriff "Folge" reeller Zahlen nun wie folgt definieren:

Definition 26: Eine Folge a ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Die Werte $a(n)$ von $n \in \mathbb{N}$ notiert man auch in der Form $a_1, a_2, a_3, \ldots$, und die Folge notiert man als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Zahlen a_n heißen auch Folgenglieder.

Beispiel 20:

- Folge der Quadratzahlen: $1, 4, 9, 16, \ldots$ bzw. $q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $q(n) := n^2$.
- Folge der Stammbrüche: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ bzw. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $s(n) := \frac{1}{n}$.
- arithmetische Folge: $a_n = a_0 + nd$, z. B. $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$
- geometrische Folge: $a_n = a_0 \cdot d^n$, z. B. $2, 4, 8, 16, \ldots$
- konstante Folge: $a_n = c$, $c \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl.
- Folge $3, 5, 7, \ldots$: Hm, ist das jetzt die Folge der ungeraden Primzahlen oder die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen?

Wie das Bildungsgesetz einer Zahlenfolge aussieht, ist anhand ein paar aufgeschriebener Anfangswerte nicht immer leicht zu erkennen und oft unklar. Außerdem kann man bei $m + 1$ vielen gegebenen Anfangwerten eine Polynomfunktion m-ten Grades durch die Punkte (n, a_n) legen und behaupten, das sei das Bildungsgesetz (es ist jedenfalls *ein* mögliches Bildungsgesetz). Damit man daraus keinen Intelligenztest für andere macht, schreibt man das Bildungsgesetz in Form der Abbildungsvorschrift dazu. Überall, wo sonst Pünktchen zur Beschreibung von Folgen eingesetzt werden, kann man dann eine ganz exakte, unmissverständliche Definition vornehmen.

Beispiel 21: Auf Seite 17 hatten wir die Folge $2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \ldots$ der natürlichen Zahlen n, für die es einen Körper mit n Elementen gibt. Das ist einfach die Zahlenfolge der Primpotenzen $\{p^k;\ p \text{ prim}, k \in \mathbb{N}\}$, der Größe nach aufgeschrieben.

---

[11] Keine 9, damit die Zifferndarstellung nicht in einer 9erperiode endet!