§3.2 Folgen und Summen

(Fortsetzung)

Eine wichtige Möglichkeit, wie man Zahlenfolgen definieren kann, ist die über eine Rekursion (und geht auf das 5. Peano-Axiom zurück). Bei dieser wird auf vorige, schon definierte Folgenwerte a_n zurückgegriffen. Das wird in folgenden Beispielen, wo wir einige Zahlenfolgen rekursiv definieren, deutlich. Und durch Angabe eines Anfangswerts (ev. auch mehrerer) stellt man sicher, dass diese rekursive Definition auch irgendwo startet.

Definition 27: Die Fakultät ist eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(1) := 1$ und $f(n+1) := (n+1) \cdot f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $n! := f(n)$ für diese Folge.

Die ersten Werte der Fakultätsfunktion sind $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120 \ldots$

Die schon bekannte Potenzfunktion $a^n := a \cdots a$ (n mal), kann man auch rekursiv definieren:

Definition 28: $a^1 := a$, und $a^{n+1} := a \cdot a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wenn man möchte, geht auch folgendes ($A_1, A_2, \ldots$ seien Mengen):

Definition 29:

- $\bigcup_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i := \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \cup A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\bigcap_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i := \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \cap A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\bigtimes_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\bigtimes_{i=1}^{n+1} A_i := \Big(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i\Big) \times A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Und nach demselben Schema definiert man nun auch das Summen- und Produktzeichen:

Definition 30: Sei eine Folge a gegeben. Dann heißt die über

$$\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1,\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) + a_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge die Summenfolge von a.

Definition 31: Sei eine Folge a gegeben. Dann heißt die über

$$\prod_{i=1}^{1} a_i := a_1,\ \prod_{i=1}^{n+1} a_i := \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big) \cdot a_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge die Produktfolge von a.

Das Zeichen $\sum$ heißt auch Summenzeichen, das Zeichen $\prod$ das Produktzeichen. Die natürliche Zahl i, die darin vorkommt, ist eine lediglich eine Hilfszahl für die Definition und heißt Index. Man nimmt auch andere Buchstaben außer i dafür, typischerweise n oder auch k.

Die Summenfolge ist also eine Folge s mit $s_1 := a_1$ und $s_{n+1} := s_n + a_{n+1}$, in unserer Pünktchenschreibweise hat man also $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, dieses n-te Folgenglied von s ist einfach die Summe der ersten n Folgenglieder $a_1, \ldots, a_n$ von a. Und ohne Pünktchen schreiben wir jetzt also $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Das Summenzeichen wird sehr häufig verwendet. Eine Summenfolge nennt man auch eine Reihe, und ihre Folgenglieder Partialsummen. In dieser Sprechweise ist eine Reihe also eine Folge von Partialsummen.

In unserem Beispiel Nr. 16 zur vollständigen Induktion hatten wir auf der linken Seite der Behauptung die Summe

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1),$$

die dortige Formel kann man jetzt auch schreiben als

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2.$$

Derartige Formeln gibt es zuhauf, man kann sie auch meistens nach dem Muster wie in Beispiel Nr. 16 mit vollständiger Induktion beweisen. Beispielsweise ist es jetzt ganz leicht, mit vollständiger Induktion die Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$ zu verallgemeinern zur Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Und die Behauptung der früheren Übungsaufgabe zur Induktion lässt sich jetzt notieren als

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1},$$

sofern $x \neq 1$ gilt; die Formel gilt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und heißt geometrische Summenformel.

Man kann auch Summenschreibweisen benutzen, in der Bedingungen an den Index gestellt werden, wie z. B. in

$$\sum_{n,\, n^2 \leq 9} a_n = a_1 + a_2 + a_3, \quad \sum_{n,\, n|10} a_n = a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} \text{ usw.}$$

Das ist auch oft sehr nützlich.

Noch eine letzte Definition in diesem Zusammenhang: Man kann rekursive Definitionen sogar wie folgt "in zwei Richtungen" machen: Man definiert etwa das in der Kombinatorik übliche Symbol $\binom{n}{k}$ wie folgt:

Definition 32: Es sei $\binom{n}{0} := 1$, $\binom{0}{k} := 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$, sowie

$$\binom{n+1}{k+1} := \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$. Man nennt die Zahl $\binom{n}{k}$ Binomialkoeffizient.

Der Name kommt daher, dass diese Zahlen in der allgemeinen binomischen Formel als Koeffizienten (d. h. Vorzahlen) vorkommen:

Satz 5. $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Beweis? Geht jetzt mit vollständiger Induktion. (Versuchen Sie es selbst…)

Und die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

die Sie vermutlich aus der Schule kennen, lässt sich wegen obiger rekursiver Definition jetzt elegant mit vollständiger Induktion beweisen. (Das können Sie auch mal versuchen.)

§3.3 Grenzwerte von Folgen, Summen und Funktionswerten

Wir studieren jetzt Folgen und Summen (die spezielle Folgen sind) nun daraufhin, ob und wann man ihnen einen Grenzwert zuordnen kann.

Definition 33: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (bzw. heißt konvergent), wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - c| < \varepsilon$$

Die Zahl c heißt dann Grenzwert der Folge. Ist eine Folge nicht konvergent, heißt sie divergent bzw. man sagt, sie divergiert.

Falls $c = 0$ Grenzwert ist, heißt die Folge eine Nullfolge.

Mit anderen Worten: Konvergenz gegen c liegt vor, wenn es zu jeder (beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle darauffolgenden Folgenglieder a_n mit $n \geq n_0$ nahe a liegen, genauer gesagt, ihr Abstand zu c ist kleiner als die vorgegebene positive Zahl ε. Hiermit ist ganz genau ausgedrückt, was "beliebig nahe kommen" bedeutet, indem wir den Abstand der Folgenglieder a_n zu c mit $|a_n - c|$ quantifiziert haben und fordern, dass dieser für alle genügend großen Indizes n unterhalb der vorgegebenen Schrankenzahl $\varepsilon > 0$ bleibt. Und je kleiner $\varepsilon > 0$ ist, umso kleinere Abstände fordern Sie; dann muss man eben größere Indizes nehmen.

Der Begriff ist sehr wichtig, bilden Sie einmal die logische Verneinung und ihre sprachliche Umsetzung und überlegen sich deren Bedeutung, am besten auch in Beispielen. Am Anfang ist folgendes Beispiel ganz gut, mal sehr ausführlich aufgeschrieben:

Beispiel 22: Die Folge der Stammbrüche, $a_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, ist konvergent, und ihr Grenzwert ist gleich 0.

Beweis: Wir zeigen das Kriterium der Definition, nämlich: Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, gibt es dazu ein passendes n_0, mit der Eigenschaft, dass $|a_n - 0| \leq \varepsilon$ gilt für alle $n \geq n_0$. Die zu erfüllende Ungleichung ist: $|\frac{1}{n}| \leq \varepsilon$, und äquivalent zu: $\frac{1}{\varepsilon} \leq n$. Kann dies ab einem n_0 gelten? Ja, für die n, die größer oder gleich n_0 sind, und n_0 definieren wir dabei als die kleinste natürliche Zahl, die gerade noch größer oder gleich der reellen Zahl $\frac{1}{\varepsilon}$ ist. Es gibt also eine Zahl n_0 derart, dass sie die gewünschte Eigenschaft erfüllt. Damit ist das Kriterium mit dem Grenzwert $c = 0$ bewiesen. $\square$

Das ist jetzt schon *sehr* ausführlich. Aufschreiben würde man diesen Beweis eher so:

Beispiel 23: **Beweis:** Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und dazu sei n_0 definiert als die kleinste natürliche Zahl, die größer oder gleich $\frac{1}{\varepsilon}$ ist. Dann gilt für alle $n \geq n_0$, dass $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ist, also folgt $\varepsilon \geq \frac{1}{n}$, also $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. $\square$

Aus der Definition der Konvergenz folgt, dass Grenzwerte (das sind ja in erster Linie reelle Zahlen) eindeutig bestimmt sind, falls Konvergenz vorliegt. Man schreibt für diesen Grenzwert c dann auch das Symbol

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

und schreibt die Aussage, dass a_n gegen c konvergiert, auch als

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} c.$$

Die Schreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ bezeichnet dieselbe Aussage, nämlich zweierlei: die Folge konvergiert und ihr Grenzwert ist c. Wir geben noch ein paar Beispiele, beweisen würde man die Konvergenz wie im vorigen Beispiel.

Beispiel 24: (Beispiele für Konvergenz)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Beispiel 25: Beispielfolgen, die divergieren: $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(1+n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$

Vielleicht überraschend ist, dass $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert (Beweis später). Diese Zahlenfolge heißt <u>harmonische</u> <u>Reihe</u>.

Und auch mit Grenzwerten kann man rechnen, hier ein paar Rechenregeln: ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b)

1	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = a \cdot b$
3	$a \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$
4	$\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n \rvert = \lvert a \rvert$
5	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, falls alle $a_n \geq 0$

Mit diesen Regeln erhält man dann schon einfache Methoden zur Bestimmung von Grenzwerten, wie etwa in folgendem Beispiel:

Beispiel 26: Sei a die Folge $a_n := \frac{1+3n-2/n}{4n^2-2}$. Dann ist

$$a_n = \frac{1/n^2 + 3/n - 2/n^3}{4 - 2/n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{4-0} = 0.$$

Die Konvergenz einer Reihe ist nun nichts weiter als die Konvergenz der Summenfolge. In diesem Fall schreibt man für den Grenzwert der Reihe dann auch das Symbol

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \text{ wie z. B. in } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Vorsicht, Verwechsungsgefahr: Mit diesem Symbol ist manchmal nicht der Grenzwert gemeint, sondern das Symbol wird auch als Name für die Summenfolge benutzt, wie z. B. in "die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert" – also offenbar auch dann, wenn keine Konvergenz vorliegt.

Und jetzt können wir auch endlich zeigen, dass $0.9999\dots = 1$ gilt: Es ist

$$0.9999\dots = \sum_{i=1}^{\infty}(9 \cdot 10^{-i}) = 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i, \text{ falls konvergent.}$$

Der Grenzwert existiert tatsächlich, denn nach unserer früheren geometrischen Summenformel, die Sie mit vollständiger Induktion gezeigt haben, ist

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1-(1/10)^{n+1}}{1-1/10} = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{10}{9},$$

also

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{9},$$

was oben eingesetzt zeigt, dass 1 herauskommt für $0.999999\dots$

Ebenso zeigt man:

Satz 6. *(geometrische Reihe)*

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1: \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

Unter anderem werden Sie voraussichtlich auch die folgenden Sätze[12] in Ihrer Analysis-Vorlesung bewiesen bekommen; sie sind nützlich für die Anwendung in Beispielen.

Satz 7. *Lassen sich für alle $n \geq n_0$ die Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abschätzen durch $b_n \leq a_n \leq c_n$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = c$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.*

Satz 8. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.*

[12]Satz 7 ist auch bekannt als "Sandwich-Lemma" oder "Einschnürungs-Satz".