

§3.3 Grenzwerte von Folgen und Reihen

(Fortsetzung)

Definition 34: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \geq a_n$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).

Satz 9. Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent.

Diesen Satz nutzen wir jetzt in einem Beispiel:

Beispiel 27: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. (Beschränkt ist sie wegen $1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \leq 3$.) Ihren Grenzwert

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,718\dots$$

definieren wir als die Eulersche Zahl e . Man kann zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Definition 35: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist durch den Grenzwert

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

eine Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, sie heißt Exponentialfunktion.

Es folgt sofort, dass $e = \exp(1)$ und $\exp(0) = 1$. Eine fundamentale Eigenschaft ist $(x, y \in \mathbb{R})$:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y),$$

so dass (nach etwas Beweisarbeit) folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Q} : \exp(xy) = \exp(x)^y.$$

Also ist $\exp(y) = e^y$ für alle $y \in \mathbb{Q}$.

Damit bekommen wir unsere alte Frage in den Griff, wie man mit irrationalen Hochzahlen arbeitet. Die folgende Definition ist nun sinnvoll:

Definition 36: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ definieren wir $e^x := \exp(x)$.

Einige Rechenregeln lassen sich dann wie folgt zusammenfassen $(x, y \in \mathbb{R})$:

1	$e^{x+y} = e^x e^y$
2	$(e^x)^y = e^{xy}$
3	$x \leq y \Rightarrow e^x \leq e^y$
4	$\forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Als Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist die Exponentialfunktion wegen Regel 3 eine bijektive Funktion, man kann dann die zugehörige Umkehrabbildung definieren:

Definition 37: Die Funktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als Umkehrabbildung von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, d. h. über die Eigenschaft

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ln(\exp(x)) = x \quad \text{bzw.} \quad \forall y \in \mathbb{R}_{>0} : \exp(\ln(y)) = y.$$

Sie heißt der natürliche Logarithmus.

Die definierende Eigenschaft von $\ln$ lässt sich auch schreiben als die Aussage

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x)$$

Für beliebige Basen $a > 0$ können wir jetzt die Potenz mit beliebigen reellen Hochzahlen über die Exponential- und Logarithmusfunktion berechnen:

Satz 10. Für $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $a^x = e^{x \ln a}$.

Beweis: Nach Regel 2 und der Definition von $\ln$ gilt: $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$. □

Die bisherigen Potenzgesetze gelten jetzt uneingeschränkt für alle positiven Basen a . Wir fassen noch einige weitere Rechenregeln zusammen, die beim Rechnen mit $\exp$, $\ln$ und Potenzen nützlich sind, und die sich aus bisher notierten Regeln herleiten lassen.

1	$\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0} : \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2	$\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0} : \ln \frac{x}{y} = \ln(x) - \ln(y)$
3	$\forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_{>0} : \ln(a^x) = x \ln(a)$

Somit gelingt uns das Auflösen der Gleichung $a^x = c$ nach a : Es ist $a = c^{1/x}$, falls $x \neq 0$ und $c > 0$; und diese Potenz ist jetzt berechenbar als $a = e^{(\ln c)/x}$.

Außerdem können wir jetzt die Gleichung $a^x = c$ sogar nach x auflösen: Es ist $x = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}$, falls $a, c > 0, a \neq 1$.

Beweis: $a^x = c \Leftrightarrow \ln(a^x) = \ln(c) \Leftrightarrow x \ln(a) = \ln(c) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}$. □

Man nennt die Zahl x mit $a^x = c$ auch den Logarithmus von c zur Basis a und schreibt $\ln_a(c) = x$ oder auch $\log_a(c) = x$ dafür.

Beispiel 28: Als ein Rechenbeispiel zum Thema $\exp$ und $\ln$ demonstrieren wir noch das Auflösen der Gleichung $a^x = c \cdot b^x$ nach x (falls $a, b, c > 0$ und $a \neq b$):

$$\begin{aligned} a^x = c \cdot b^x &\Leftrightarrow \ln(a^x) = \ln(c \cdot b^x) \Leftrightarrow x \ln(a) = \ln(c) + \ln(b^x) \Leftrightarrow x \ln(a) = \ln(c) + x \ln(b) \\ &\Leftrightarrow x(\ln(a) - \ln(b)) = \ln(c) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(c)}{\ln(a) - \ln(b)} \end{aligned}$$

Zwei interessante Grenzwerte mit $\exp$ und $\ln$ sind ($k \in \mathbb{N}$ beliebig):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\exp(n)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^{1/k}} = 0.$$

§4 Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integration

§4.1 Stetigkeit

Bisher haben wir Grenzwerte von reellen Zahlenfolgen betrachtet. Wir möchten jetzt auch Funktionengrenzwerte untersuchen und so etwas wie $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ schreiben dürfen. Das Symbol $x \rightarrow 0$ soll dabei heißen, dass wir für x alle möglichen Nullfolgen einsetzen können und dabei ein bestimmter Wert als Grenzwert herauskommt, egal, welche Nullfolgen wir nehmen.

Das ist nicht selbstverständlich: Für manche Funktionen kann so ein Grenzwert nicht eindeutig gefunden werden, dieser kann nämlich von der Art der Folgen abhängen: So gilt z. B. für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{x}{|x|}, \text{ dass } f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ aber } f\left(-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1,$$

obwohl $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(-\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ beides Nullfolgen sind.

Diese Frage gibt nun Anlass zu der folgenden Definition:

Definition 38: Sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$, und der Eigenschaft

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c)$$

heißt stetig an der Stelle c . Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn sie an jeder Stelle $c \in D$ stetig ist.

Diese Definition beschreibt die "Folgenstetigkeit" einer Funktion: Bei einer in c stetigen Funktion f kann man sich dem Funktionswert $f(c)$ durch Funktionswertfolgen annähern.

Die Folgenstetigkeit kann auch so aufgeschrieben werden: Für alle Nullfolgen $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt:

$$f(c + h_n) - f(c) \xrightarrow{h_n \rightarrow 0} 0$$

Hier hat man das Symbol $n \rightarrow \infty$ weggelassen. Die noch kürzere Notation

$$f(c + h) - f(c) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

meint aber dasselbe, nämlich dass für Nullfolgen, die wir mit $h \rightarrow 0$ notieren, die Funktionswerte $f(c+h)$ gegen $f(c)$ konvergieren. (Betrachten Sie in der Definition $h_n := a_n - c$, und Sie erhalten die äquivalente Version hier.)

In der Analysis gibt es noch eine weitere äquivalente Formulierung für den Stetigkeitsbegriff, die wir jetzt als Satz festhalten:

Satz 11. (" $\varepsilon - \delta$ -Stetigkeit")

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $c \in D$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $c \in D$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Anstelle von h haben wir in dieser Version eine Schrankenahl $\delta > 0$ eingeführt, die die Abstände von Punkten x nach c beschränkt. Gefordert wird in dem Kriterium nun, dass die Funktionswerte $f(x)$ dann nahe $f(c)$ liegen, dass deren Abstand zu $f(c)$ also höchstens so groß ist wie die Schrankenahl $\varepsilon > 0$.

Um einen Beweis zu führen, dass eine spezielle Funktion stetig an einer Stelle c ist, kann man also auch dieses $\varepsilon - \delta$ -Kriterium heranziehen.

Beispiel 29: Wir demonstrieren dies an folgendem Beispiel:

Beh.: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3$, ist an jeder Stelle $c \in \mathbb{R}$ stetig.

Bew.: Sei $c \in \mathbb{R}$ eine zu untersuchende Stelle und man betrachte eine (beliebig vorgebbare) Schrankenahl $\varepsilon > 0$. In Abhängigkeit von ε kann nun eine Zahl $\delta > 0$ angegeben werden, die die behauptete Implikation erfüllt, nämlich $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$:

Denn ist ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - c| < \delta$ vorgegeben, so folgt $|2x + 3 - (2c + 3)| = |2(x - c)| = 2|x - c| < 2\delta = \varepsilon$. Die Existenz von $\delta > 0$ ist damit durch Konstruktion bewiesen. $\square$

Für kompliziertere Funktionen ist ein solcher $\varepsilon - \delta$ -Stetigkeitsbeweis meist auch schwieriger durchzurechnen; man muss dazu gut mit Beträgen rechnen können, um ein passendes $\delta > 0$ in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$ zu finden.

Zur Anschauung kann man sich vorstellen, dass man die Funktion im Koordinatensystem in einem Strich durchzeichnen kann, ohne dabei den Stift absetzen zu müssen. Bei dem Schaubild der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, |f(x)| = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$, geht das an der Stelle $c = 0$ nicht mehr; dort ist die Funktion ja auch nicht stetig, wie wir eingangs gesehen haben. Die üblichen Funktionen, die man aus bisherigen Grundfunktionen wie $x^2, \sqrt{x}, e^x$ usw. ansonsten zusammenstellen kann, sind aber meistens stetig auf ihrem Definitionsbereich. (Ein paar Stetigkeitssätze helfen dafür natürlich auch, um das zu sehen.)

Für solche stetigen Funktionen, wie etwa e^x , macht dann ein Ausdruck der Gestalt $\lim_{x \rightarrow 0} e^x$ wirklich Sinn.

Dazu noch ein letztes Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Die Funktion $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^{1/n}$, ist dann eine überall auf $[0, 1]$ stetige Funktion. Etwas Merkwürdiges passiert, wenn wir hingegen ein $x \in (0, 1]$ festhalten und $n \rightarrow \infty$ betrachten, dann ist nämlich $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1$. Für $x = 0$ ist aber $\lim_{n \rightarrow \infty} 0^{1/n} = 0$. Offenbar kann die Stetigkeit "kaputtgehen", wenn man zu "Grenzfunktionen" übergeht, und das auch schon bei sehr einfachen Funktionen. Daher muss man sorgfältig mit dem Stetigkeitsbegriff umgehen, wenn man mehrere Grenzprozesse ($x \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$) gleichzeitig betrachten möchte, offenbar spielt deren Reihenfolge eine große Rolle, denn man hat:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1, \text{ aber } \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} x^{1/n} = 0.$$

Solche Untersuchungen, wann sich Grenzwertbildungen vertauschen lassen, sind wichtiger Bestandteil der Analysis.