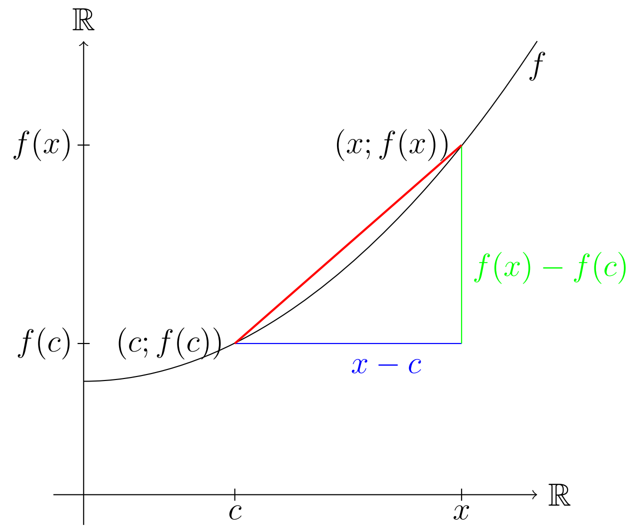
§4.2 Differenzierbarkeit

Aus einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und einem Wert $c \in D$ kann man eine neue Funktion bilden, den Differenzenquotienten

$$Q_{f,c} : D \setminus \{c\} \to \mathbb{R}, \quad Q_{f,c}(x) := \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Anschaulich beschreibt dieser Quotient eine Sekantensteigung der Funktionskurve, wobei die fragliche Sekante einfach die Gerade durch die Punkte $(c, f(c)), (x, f(x)) \in D \times \mathbb{R}$ ist:



Wenn nun der Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{x \to c} Q_{f,c}(x)$ existiert, würden wir diesen Wert anschaulich als Tangentensteigung der Kurve im Punkt $(c, f(c)) \in D \times \mathbb{R}$ identifizieren. Definieren wir den Wert als $Q_{f,c}(c)$, erhalten wir dann eine stetige Funktion $Q_{f,c} : D \to \mathbb{R}$.

Daher die folgende Definition:

Definition 39: Falls $\lim\limits_{x \to c} Q_{f,c}(x)$ existiert, heißt die Funktion f differenzierbar an der Stelle c. Sie heißt differenzierbar, falls sie an *jeder* Stelle $c \in D$ differenzierbar ist. Den Wert $\lim\limits_{x \to c} Q_{f,c}(x)$ nennt man dann auch Ableitung von f an der Stelle c und schreibt dafür $f'(c)$.

Man kann den Grenzwert natürlich auch mittels Folgen ausdrücken: Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(c),$$

falls f bei c differenzierbar ist, und zwar für *jede* Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} c$.

Mit der h-Schreibweise ausgedrückt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$$

und der Vereinbarung, dass $h \to 0$ bedeutet, dass diese Aussage für *alle* Nullfolgen gilt, wenn diese anstelle h eingesetzt werden.

Eine Tatsache, die man über differenzierbare Funktionen wissen muss: Eine bei c differenzierbare Funktion ist stetig, aber nicht immer umgekehrt, wie das Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, bei $x = 0$ zeigt.

Definition 40: Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist nun die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ ihrer Ableitungen. Höhere Ableitungen (die zweite, dritte, vierte Ableitung usw.) definiert man über $f^{(1)}(x) := f'(x)$, $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Für die Ableitung von differenzierbaren Funktionen können nun die bekannten Ableitungsregeln bewiesen werden (f, g differenzierbare Funktionen, $c \in \mathbb{R}$. Die Regeln 3 und 4 gelten, falls $g(x) \neq 0$):

1	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	
2	$(cf)'(x) = cf'(x)$	
3	$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	Produktregel
4	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	Quotientenregel
5	$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$	
6	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel
7	$m(x) := x^r$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow m'(x) = rx^{r-1}$	
8	$\exp'(x) = \exp(x)$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$	

Bemerkung: Die Funktion $f \circ g$ ist die *Verkettung* zweier Funktionen f und g, d. h. $f \circ g(x) := f(g(x))$. Die Definitionsbereiche von f und g müssen dafür geeignet zueinander passen.

Beispiel 30: Nach den Regeln hier hat die Funktion $f(x) := a^x = \exp(x \ln a)$ die Ableitung $f'(x) = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \ln a$.

Den weiteren Stoff über die Differenzierbarkeit von Funktionen möchte ich hier nicht vorwegnehmen. Es soll nur ein Highlight der Analysis genannt werden, nämlich der Taylor-Satz. Er besagt inhaltlich, dass sich geeignete Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $a \in D$ durch die Reihe

$$T_f(x,a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

approximieren lassen, d. h. so, dass für x in der Nähe von a dann $f(x) \approx T_f(x,a)$ gilt. Man sagt dann auch, dass sich f um a als Taylor-Reihe entwickeln lässt. Das ist sehr praktisch, weil man mit Taylor-Partialsummen, die einfach nur spezielle Polynome sind, oft einfacher rechnen kann als mit der ursprünglich gegebenen Funktion f. Das ist genau ein wichtiges Ziel der Analysis: die Berechnung komplizierter Funktionen f mittels einfachen Funktionen wie beispielsweise Polynome. Dann lässt sich deren numerische Berechnung nämlich leicht auf Rechner übertragen.

Ein hinreichendes Kriterium dafür, dass eine solche Taylor-Entwicklung klappt, ist beispielsweise das Folgende (I bezeichnet ein Intervall im Definitionsbereich, das den Punkt a enthält, und f muss unendlich oft differenzierbar sein):

$$\exists\, A, B > 0\ \forall\, x \in I\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ |f^{(n)}(x)| \leq AB^n.$$

Die Entwicklung der Funktion exp um den Punkt 0 liefert genau die Reihe, die wir zur Definition von exp benutzt haben. Die Reihenentwicklung von $\ln(1+x)$ um 0 konvergiert genau für $-1 < x \leq 1$, dort ist dann

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Man sagt für diese Reihenentwicklungen auch "Entwicklung in eine Potenzreihe", denn die Taylor-Reihe ist ein spezielles Beispiel für eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ \text{die } a_k \in \mathbb{C}.$$

§4.3 Integration

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $[a, b] \subseteq D$. Als Grenzwert von Riemann-Summen[13] definiert man das Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Diese reelle Zahl beschreibt ("misst") den Flächeninhalt[14] zwischen der x-Achse und dem Kurvenschaubild von f, sofern keine Nullstelle im Intervall I liegt. Genau genommen wird erst durch das Integral der Flächeninhalt definiert.

Aus den Regeln für Grenzwerte bzw. der Definition und früheren Sätzen leitet man dann die folgenden Integrationsregeln ab: $(a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

1	$\int_a^a f(x)dx = 0$
2	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3	$\int_a^b 1dx = b - a$
4	$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
5	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
6	$(\forall\, x \in [a, b]:\ f(x) \leq g(x)) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
7	$\lvert \int_a^b f(x)dx \rvert \leq \int_a^b \lvert f(x) \rvert dx$

[13] Das wird später in der Analysis noch genau formalisiert.
[14] versehen mit dem richtigen Vorzeichen

Ein weiteres großes Highlight der Analysis ist nun der Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration, der als *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* bekannt ist:

Satz 12. *Sei f eine auf dem Intervall I stetige Funktion. Dann gilt:*

(1) Die durch

$$F_a(x) := \int_a^x f(t)dt \qquad a, x \in I$$

definierte Funktion ist eine Stammfunktion von f, d. h. es gilt $F_a'(x) = f(x)$. Jede (andere) Stammfunktion F von f hat die Form $F(x) = F_a(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(2) Mit einer beliebigen Stammfunktion F von f gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Man schreibt auch $F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$.

Dies besagt, dass die Integration im wesentlichen die Umkehrung der Differentiation ist. Das Ziel der Analysis, dass man komplizierte Funktionen – hier beispielsweise Integrale, die aus der Anwendung kommen – einfach berechnen kann, ist damit gelöst: Die Integralberechnung wurde auf die Umkehrung der Ableitungsbildung zurückgeführt und damit leichtgemacht.

Aus den Ableitungsregeln lassen sich dann auch die folgenden Sätze beweisen, die zum Berechnen von Integralen nützlich sind:

Satz 13. *(Partielle Integration) Seien u, v auf $[a, b]$ differenzierbare Funktionen mit stetiger Ableitung. Dann gilt:*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Satz 14. *(Substitutionsmethode) Seien g, f auf $[a, b]$ bzw. $[g(a), g(b)]$ differenzierbare Funktionen mit stetiger Ableitung. Dann gilt:*

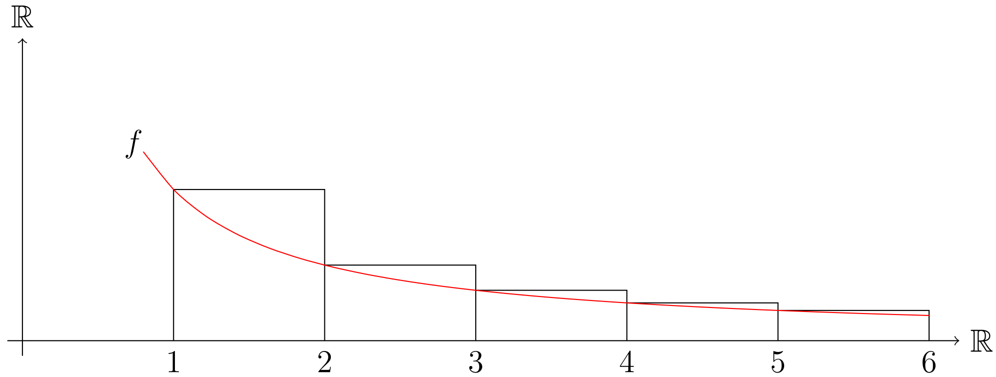
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

Nun der versprochene Beweis, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert: Wir führen den Beweis durch einen *Integralvergleich*: Es ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1),$$

was für $n \to \infty$ immer größer wird; die Werte $\ln(n+1)$ sind unbeschränkt. □

Den Integralvergleich verstehen Sie anschaulich durch Betrachtung des Flächeninhalts unterhalb der Treppenfunktion $t : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, $t(x) := \frac{1}{k}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq x < k+1$ ist, mit dem Flächeninhalt unterhalb der Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$:



§5 Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und trigonometrische Funktionen

Man kann die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen einfach definieren als Menge $\mathbb{R}^2$, versehen mit der richtigen Definition für "+" und "·".

Eine Verwechslung mit $\mathbb{R}^2$ als Menge möchte man aber möglichst vermeiden, daher schreibt man anstelle eines Zahlenpaares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dann einfach $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und nennt dies eine komplexe Zahl mit Realteil x und Imaginärteil y. Im Koordinatensystem der Ebene lassen sich die komplexen Zahlen dann als Punkte darstellen. Die x-Achse nennt man dann auch die reelle Achse, die y-Achse die imaginäre Achse.

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C} := \{x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ bezeichnet. Für zwei komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ gilt: $z = w \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$.

Die Summe bzw. Differenz zweier komplexer Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ wird jetzt komponentenweise definiert, d. h.

$$z \pm w := (x \pm u) + i(y \pm v).$$

Die Multiplikation hingegen muss anders gemacht werden, die Definition hierfür lautet

$$zw := (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Daraus folgt, dass

$$i^2 = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$$

ist, das alte Problem mit der Lösbarkeit von $x^2 = -1$ ist damit erledigt: Ja, die Gleichung hat in $\mathbb{C}$ die Lösung $x = i$ (und auch $x = -i$). Daher können wir dem Symbol $\sqrt{-1}$ einen Sinn geben und $\sqrt{-1} := i$ schreiben.

Zunächst muss gesagt werden, dass $\mathbb{C}$ mit den so definierten Verknüpfungen "+" und "·" einen Körper bilden, der $\mathbb{R}$ enthält, nämlich in Form der speziellen komplexen Zahlen $x + i \cdot 0$.

Die dafür nötige Division als Umkehrung der Multiplikation erhält man über

$$\frac{z}{w} = \frac{x+iy}{u+iv} := \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\frac{yu-xv}{u^2+v^2}.$$

Noch zwei Begriffe:

Definition 41: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die zu z konjugiert komplexe Zahl ist $\overline{z} := x - iy$. Der Betrag $|z|$ von z ist die nichtnegative reelle Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Die Lösung von Gleichungen mit Potenzen in x kann in $\mathbb{C}$ jetzt beliebig ausgeführt werden, es gilt nämlich der folgende Satz von Gauß, der auch Fundamentalsatz der Algebra genannt wird:

Satz 15. *(Fundamentalsatz der Algebra) Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$ ein nicht konstantes Polynom mit $n \in \mathbb{N}$ und komplexen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$. Dann hat das Polynom eine komplexe Nullstelle, d. h. es gibt eine Zahl $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $P(z) = 0$ löst.*

Bewiesen wird dieser Satz oft in einer Vorlesung über Funktionentheorie.

Inwiefern vererben sich die anderen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$? Nun, die Vollständigkeit in dem Sinne, dass Cauchyfolgen immer einen Grenzwert besitzen, vererbt sich nach $\mathbb{C}$, denn Grenzwerte kann man in $\mathbb{C}$ komponentenweise bilden, und als den (für den Grenzwertbegriff nötigen) Abstand zwischen zwei komplexen Zahlen z, w nehmen wir den Wert $|z - w|$.

Aber ein Opfer müssen wir bei dieser Erweiterung von $\mathbb{R}$ hinnehmen: Die Ordnungsrelation $\leq$ kann nicht auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden, d.h. $\mathbb{C}$ ist nicht anordenbar und kann damit nicht auf einen einzigen Zahlenstrahl gebracht werden, wie das mit $\mathbb{R}$ ging. Bei der Veranschauung von $\mathbb{C}$ müssen wir stets mit der ganzen komplexen Ebene arbeiten, ein einziger "Anordnungsstrahl" reicht hier nicht aus. Daher ist ein Ausdruck wie $i < 2$ absolut sinnlos. Hingegen ist die Aussage $|i| < 2$ wahr, da der Betrag den Abstand einer komplexen Zahl zum Nullpunkt $0 = 0 + i \cdot 0$ misst und eine reelle Zahl ist.

Für das Rechnen in $\mathbb{C}$ gelten die folgenden Rechenregeln ($w, z \in \mathbb{C}$):

1	$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2	$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3	$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, falls $w \neq 0$
4	$\overline{\overline{z}} = z$
5	$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
6	$\operatorname{Im} = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
7	$\lvert z\rvert = \sqrt{z\overline{z}}$
8	$\lvert zw\rvert = \lvert z\rvert \cdot \lvert w\rvert$
9	$\lvert\frac{z}{w}\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert}$ falls $w \neq 0$
10	$\lvert z\rvert = \lvert\overline{z}\rvert$
11	$\lvert z+w\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert w\rvert$

Die Exponentialfunktion kann durch ihre Reihendarstellung

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

zu einer Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

Die alte Formel $\forall z, w \in \mathbb{C} : \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ bleibt für komplexe Zahlen gültig. Aus dieser kann man nun herleiten, dass $\forall x \in \mathbb{R} : |\exp(ix)| = 1$, denn: $|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(\overline{ix}) = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1$.

Und es gelten die folgenden Rechenregeln, die Moivresche Formeln heißen ($x, y \in \mathbb{R}$):

1	$\exp(ix)\exp(iy) = \exp(i(x+y))$
2	$(\exp(ix))^n = \exp(inx),\ n \in \mathbb{N}$
3	$\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix) = \frac{1}{\exp(ix)}$

Nun können wir die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus wie folgt definieren:

Definition 42: Für $z \in \mathbb{C}$ ist durch $\cos(z) := \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$ die Cosinusfunktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, und durch $\sin(z) := \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$ die Sinusfunktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert.

Es folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Eulersche Formel $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ und sofort, dass $\sin^2 x + \cos^2 x = |\exp(ix)|^2 = 1$.

Die beiden Funktionen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind für reelle x reellwertig mit Werten in $[-1, 1]$ und periodisch mit derselben Periode. Die Hälfte der Periodenlänge kann man nun als die Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ definieren[15] und somit die Periodizität notieren in der Form

$\forall\, x \in \mathbb{R} : \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$

Damit ist auch $\exp(2\pi i) = 1$, bzw. $\exp(x + 2\pi i) = \exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Weiter haben die Funktionen sin und cos genau die Nullstellen

$$\begin{aligned} \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \dots \\ \sin x = 0 &\Leftrightarrow x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \end{aligned}$$

Ist nun $z \in \mathbb{C}$, gibt es eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $\varphi \in (-\pi, \pi]$ so dass $z = |z|\exp(i\varphi)$ gilt. Diese Zahl heißt Argument von z und die Darstellung $z = |z|\exp(i\varphi)$ heißt die Darstellung von z in Polarkoordinaten.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen in Polarkoordinaten geht nun besonders leicht, da für $z = |z|\exp(i\varphi)$ und $w = |w|\exp(i\psi)$ gilt:

$$z \cdot w = |z||w|\exp(i(\varphi + \psi)), \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\exp(i(\varphi - \psi)),\ \text{falls } w \neq 0.$$

Formeln für die trigonometrischen Funktionen sin und cos wie die Additionstheoreme

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

[15] Oder beweisen, dass diese identisch mit der Kreiszahl π ist, die Sie kennen! Wie würden Sie π definieren?

und zahlreiche weitere Identitäten, die man für diese Funktionen in Formelsammlungen findet, lassen sich nun leicht herleiten: Für die Additionstheoreme beispielsweise berechnet man

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= \exp(i(x+y)) = \exp(ix)\exp(iy) \\ &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\ &= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \sin y\cos x)\end{aligned}$$

und vergleicht die Real- und Imaginärteile der linken und rechten Seite miteinander.

Ein letztes Wort bzw. eine Warnung zum Rechnen mit komplexen Zahlen: Die Moivresche Formel Nr. 2 stimmt nur mit natürlichen Zahlen n, d. h. im allgemeinen ist $(\exp(ix))^r \neq \exp(ixr)$ für $r \notin \mathbb{N}$.

Denn würde man beispielsweise $\frac{1}{2}$ einsetzen für die Zahl r bzw. n und den Wert $x = 2\pi$ betrachten, so erhält man $l.S. = (\exp(2\pi i))^{1/2} = 1^{1/2} = 1$, aber $r.S. = \exp(i \cdot \pi) = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$.

ENDE