Beweismethoden: Satz: $A \Rightarrow B$

- direkt, u.a. Ringschlußbeweis, vollst. Induktion
- indirekt:
  - Widerspruchsbeweis
  - Kontrapositionsbeweis: $\neg B \Rightarrow \neg A$

Def.: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Zahl $a \in \{0, 1, \dots, 9\}$ heißt Endziffer von n, falls $\exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 10k + a$

Satz: Vor.: $n \in \mathbb{N}$, n habe Endziffer 2, 3, 7 oder 8.
Beh.: n ist keine Quadratzahl.

Bew. (Kontraposition):
z.z.: n Quadratzahl $\Rightarrow n$ hat Endziffer $\in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.
Bew.: Ist $n = m^2$ mit $m \in \mathbb{N}$, $m = 10k + a$ mit $k, a \in \mathbb{N}$.
Dann ist $n = (10k+a)^2 = \underline{100k^2 + 20ka} + a^2 = 10 \cdot (10k^2 + 2ka) + a^2$,
also hat n dieselbe Endziffer wie a^2.

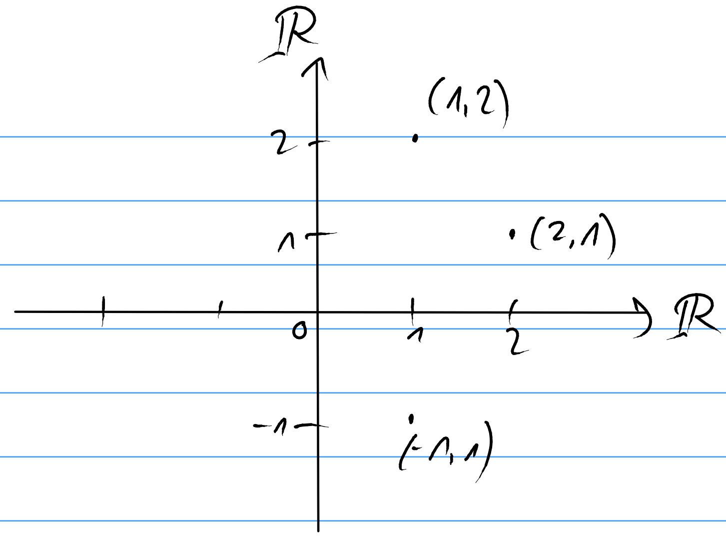
Wegen

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Endz.	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

sind alle mögl. Endz. für n aus $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, andere kommen nicht vor. $\square$

$A \cap B \cap C$ $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

$n = 5$: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$
$= \bigcap_{i=1}^{n} A_i$



$$2^{\left(2^{n}\right)} + 1$$

$$2^{2^{1}} + 1 = 2^{2} + 1 = 5 \checkmark$$

$$2^{2^{2}} + 1 = 2^{4} + 1 = 17 \checkmark$$

<u>Bsp.:</u> "Kleiner Gauß"

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bew. (vollst. Ind.):

Ind. anf.: $n = 1$: $\quad 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \checkmark$

Ind. schritt; $n \rightsquigarrow n+1$: Ind. ann.: Formel gelte für $n \in \mathbb{N}$.

z.z.: Sie gilt dann auch für $n+1$:

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{\overset{\text{Ind.ann.}}{=} \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{(n+1)n}{2} + (n+1) = (n+1) \cdot \frac{n+2}{2}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2} \checkmark \qquad \square$$

$$(x\pm y)^2 = (x\pm y)\cdot(x\pm y)$$
$$= x\cdot(x\pm y) + y\cdot(x+y)$$
$$= x^2 \pm xy \pm yx + y^2$$
$$= x^2 \pm 2xy + y^2$$

$$(-1)\cdot(-1) = (0-1)\cdot(0-1) = 0^2 - 2\cdot 0\cdot 1 + 1 = 1$$

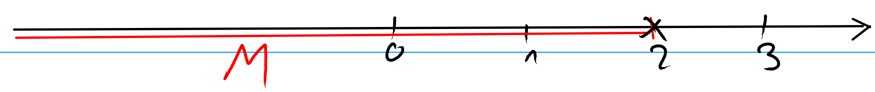
da $0\cdot x = 0$ für alle $x\in\mathbb{Z}$

$0\cdot x = a$ Lsg. für x?

1. $a \neq 0$: $\mathbb{L} = \{x\in\mathbb{Z};\ 0\cdot x = a\} = \emptyset$
2. $a = 0$: $\mathbb{L} = \{x\in\mathbb{Z};\ 0\cdot x = 0\} = \mathbb{Z} \leftarrow$

$$0\cdot x = 0 \iff (1-1)\cdot x = 0$$
$$\iff 1\cdot x - 1\cdot x = 0$$
$$\iff 1\cdot x = 1\cdot x$$
$$\iff x = x \quad ✓$$

Bsp: $K=\mathbb{R}$, $M := \{x\in K=\mathbb{R};\ x<2\}$, hat kein Maximum, aber $\sup M = 2$



Menge der ob. S. von M ist $\{y\in\mathbb{R};\ y\geq 2\}$

$y=3$ ist o.S. für M
oder $y=4$
oder $y=2{,}1\ldots$
oder $y=2$ ✓

$z\in\mathbb{R}$ heißt Kl.o.S. von M, falls $\forall \varepsilon>0\ \exists x\in M: z-\varepsilon < x$

$z=2$ ist Kl.o.S. von M, denn für $2-\varepsilon$ ex. $x\in M$

mit $2 - \varepsilon < x$,
z.B. $x := 2 - \frac{\varepsilon}{2} \in M$

$$8.000.000.000\,\ell = 8 \cdot 10^9\,\ell = 2^3 \cdot (10^3)^3\,\ell$$
$$= 2^3 \cdot (10^3)^3 \cdot (10\,cm)^3$$
$$= 2\,0.000^3\,cm^3$$

$\ulcorner 1\,\ell = (10\,cm)^3 \lrcorner$ $\rightsquigarrow$ Kantenlänge 20 000 cm
$= \underline{\underline{200\,m}}$

$(1,2) \in \mathbb{R}^2$
$]1,2[= \{x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 2\}$

(a, b) im Skript

$$\rightsquigarrow \underbrace{[a,b]}_{\text{abg. IV}} = \underbrace{]a,b[}_{\text{offenes IV}} \cup \{a,b\}$$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$
$\underbrace{[a,b)}_{\text{"halb" offen}} = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}$
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$

Cantorsches (Erstes) Abzählverfahren:

Beh.: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

Bew.: Haben $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \}$.

$$
\begin{array}{lllllll}
0, & \frac{1}{1}, & -\frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & -\frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{-3}{1}, \ldots \\
 & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & -\frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & -\frac{3}{2}, \ldots \\
 & \frac{1}{3}, & -\frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & -\frac{2}{3}, \ldots & & \\
 & \frac{1}{4}, & -\frac{1}{4} \ldots & & & & \\
 & \frac{1}{5} & & & & & \\
 & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Cantorsches (zweites) Abzählverfahren:

Beh.: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar, d.h. es ex. keine Bij. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Bew.: (durch Widerspruch)

Ann.: $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv,

dann gäbe es auch eine Bij. $\beta : \mathbb{N} \to]0,1[$.

$$
\begin{array}{lllll}
\beta(1) = x_1 : & 0, a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\
\beta(2) = x_2 : & 0, a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\
\beta(3) = x_3 : & 0, a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\
\beta(4) = x_4 : & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\beta(5) = x_5 : & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

Sei $y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ mit $b_1 \neq a_{11}$ und $\neq 9$

mit $b_2 \neq a_{22}$ und $\neq 9$, $b_3 \neq a_{33}$, $b_3 \neq 9, \ldots$

$\Rightarrow \nexists\, n \in \mathbb{N} : \beta(n) = y$, also: ↯. □