Bsp.: Fibonacci-Zahlen

$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird rekursiv definiert als

$$F_0 := 1,\quad F_1 := 1,\qquad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n \text{ für } n\in\mathbb{N}_0$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

---

Vor.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge

Beh.: $\forall n\in\mathbb{N}: \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

Bew. (vollst. Ind.):

Ind.anf.: $n=1$: $l.S. = |a_1| \leq |a_1| = r.S.$ ✓

Ind.schritt:

$n \rightsquigarrow n+1$: Ind.ann.: Sei die Formel wahr für ein $n\in\mathbb{N}$.

Dann ist

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}\right| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| + |a_{n+1}|$$

$$\overset{\text{Ind.ann.}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |a_i| + |a_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|. \qquad \square$$

---

Beh.: $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in\mathbb{R}: (x-1)\underbrace{(1+x+\ldots+x^n)}_{\sum_{i=0}^{n} x^i} = x^{n+1}-1$

$$(x-1)\sum_{i=0}^{n} x^i = x^{n+1}-1$$

$$\underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} \quad \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \text{glom. } \Sigma\text{-Formel}$$

| n \ k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 0 |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | |

$\binom{5}{3} = 10$

Pascalsches △

Zeile $n$, Spalte $k$: $\binom{n}{k}$

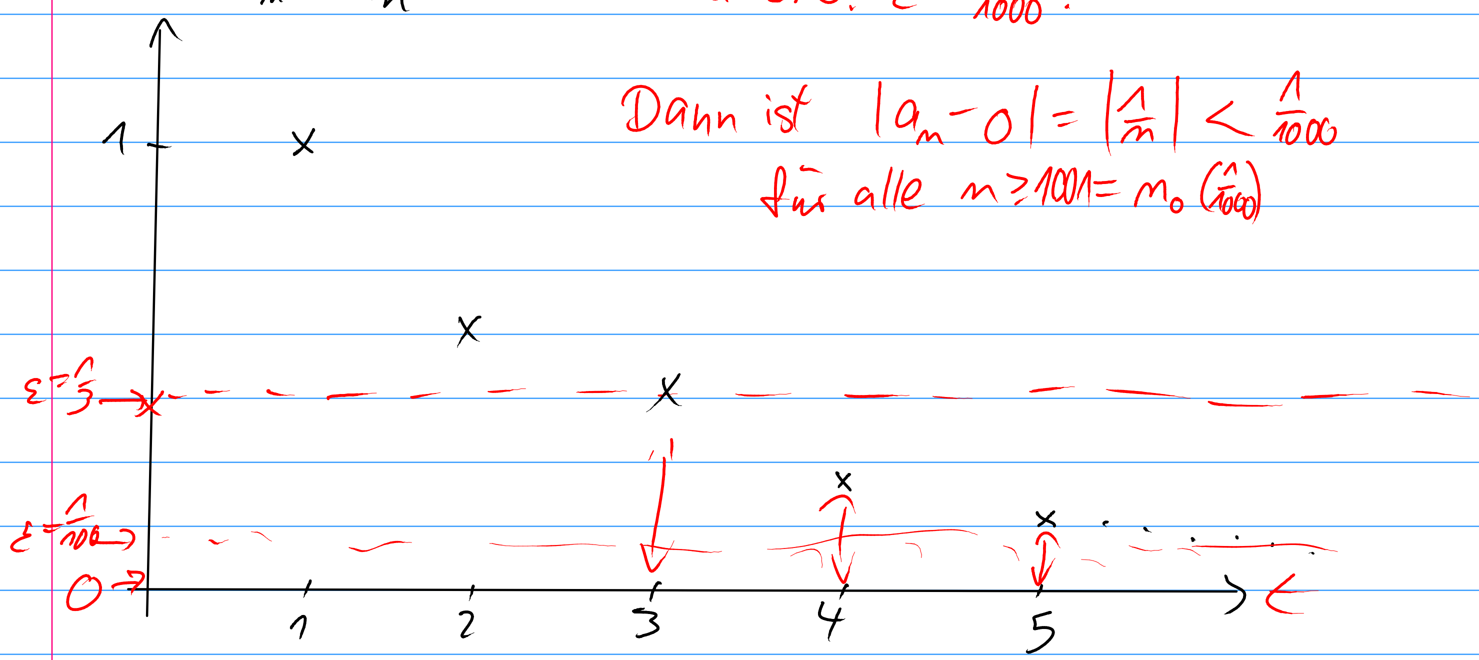
Bsp.: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

---

$a_n := \frac{1}{n}$

Sei z.B. $\varepsilon = \frac{1}{1000}$:

Dann ist $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{1000}$ für alle $n \geq 1001 = n_0\left(\frac{1}{1000}\right)$



Beh.: $\forall k \in \mathbb{N}: 2^{k-1} \leq k!$

Bew. (vollst. Ind.):

$k=1$: l.S. $= 2^0 = 1 \leq 1 = 1! =$ r.S. ✓

$k \rightsquigarrow k+1$: Ind.ann.: Formel stimmt für ein $k \in \mathbb{N}$.

$$2^{(k+1)-1} = 2^{(k-1)+1} = 2 \cdot 2^{k-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ind.ann.}}}{\leq} 2 \cdot k! \leq (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

✓