Übungsblatt Nr. 1, Besprechung am 5.9.2013

Aufgabe 1:

Gegeben seien folgende deutsche Sätze: "Wer wählen darf, ist volljährig." "Wenn man volljährig und deutscher Staatsbürger ist, darf man wählen." "Wählen dürfen genau die volljährigen deutschen Staatsbürger."
Schreiben Sie die Sätze jeweils formal als Implikation auf (kürzen Sie Teile davon ab als A, B und C), und bilden Sie die formale Kontraposition bzw. Verneinung. Wie formuliert man die Kontraposition bzw. Verneinung wieder als deutschen Satz?

Beispiel 1: Der Satz "Wenn es regnet oder der Gulli überläuft, wird die Straße nass." ist formalisierbar als $(A \vee B) \Rightarrow C$. Die Verneinung ist $\neg((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B)) \wedge \neg C \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg C$ und bedeutet "Es regnet oder der Gulli läuft über, und die Straße bleibt trocken." Die Kontraposition ist $(\neg C \Rightarrow \neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))$ und bedeutet "Wenn die Straße trocken bleibt, dann regnet es nicht, und auch der Gulli läuft nicht über."

Aufgabe 2:

Seien A, B und C Aussagen. Formulieren Sie die folgenden Aussagen um in dazu äquivalente Aussagen, die nur mit den Zeichen $\wedge, \vee$ und $\neg$ auskommen. Verwenden Sie dafür die Logikregeln aus der Vorlesung.

(1) $\neg(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow A$

(2) $\neg(A \Rightarrow B) \wedge C$

(3) $(A \Leftarrow B) \wedge B$

(4) $\neg(A \vee (A \Leftrightarrow B))$

Wie kann man diese Aussagen sprachlich ausdrücken?
Wie lauten die Verneinungen dieser Aussagen?

Aufgabe 3:

Welches Beweisverfahren wird in den folgenden Beweisen benutzt?
(Bem.: Das Zeichen $a \mid b$ heißt "a teilt b")
Vergleichen Sie die Beweise miteinander: Einmal rein äußerlich, andererseits auch inhaltlich: Wo wird direkt, wo indirekt argumentiert? (Wenn Sie nicht alles inhaltlich verstehen, ist das nicht so schlimm. Sie sollen hier nur Beispiele sehen, wie man logische Argumentationen "mathematisch" richtig aufschreiben kann.)

Satz 1: Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.
Beweis: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, etwa n, $n+1$, $n+2$, ist $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3\cdot(n+1)$, also durch drei teilbar. $\square$

Satz 2: Vor.: a, b, c seien aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
Beh.: $3 \mid a+b+c$.
Bew.: Laut Vor. ist $b = a+1$ und $c = b+1 = (a+1)+1 = a+2$. Dann gilt: $a+b+c = a+(a+1)+(a+2) = 3a+3 = 3\cdot(a+1) \Rightarrow 3 \mid a+b+c$. $\square$

Satz 3: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Beweis: Angenommen, es gäbe nur die endlich vielen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$. Dann ist die natürliche Zahl $n := p_1 \cdot p_2 \cdots p_r + 1$ durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ teilbar. Da aber jede natürliche Zahl > 1 durch eine Primzahl (etwa der kleinste Teiler von n, der > 1 ist, vgl. Satz 4) teilbar sein muss, existiert noch eine weitere Primzahl, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Satz 4: Jede natürliche Zahl n ist durch eine Primzahl teilbar.
Bew.: Sei p der kleinste Teiler > 1, der n teilt. Dann ist p prim, denn wäre p zusammengesetzt aus zwei Faktoren $a, b > 1$, so wäre $a > 1$ ein Teiler von n, der kleiner ist als p, im Widerspruch zur Wahl von p. Also ist p prim. $\square$

Satz 5: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.
Bew.: Ann.: $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_r\}$.
Betrachte $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, $\lightning$. $\square$

Bem.: Die Behauptung in Satz 4 ist auch als $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, p \in \mathbb{P} : p \mid n$ schreibbar.

Satz 6: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.
Bew.: Wir konstruieren eine unendlich große Menge von Primzahlen wie folgt: Sei p_1 eine Primzahl, etwa $p_1 := 2$. Sind Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ gegeben, betrachte man $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, setze dann $p_{r+1} := p$. Auf diese Weise können unendlich viele Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ konstruiert werden. $\square$