Lösung zum Übungsblatt Nr. 1, Besprechung am 5.9.2013

Aufgabe 1:

Gegeben seien folgende deutsche Sätze: "Wer wählen darf, ist volljährig." "Wenn man volljährig und deutscher Staatsbürger ist, darf man wählen." "Wählen dürfen genau die volljährigen deutschen Staatsbürger."
Schreiben Sie die Sätze jeweils formal als Implikation auf (kürzen Sie Teile davon ab als A, B und C), und bilden Sie die formale Kontraposition bzw. Verneinung. Wie formuliert man die Kontraposition bzw. Verneinung wieder als deutschen Satz?

Lösung: Sei A ="Person P darf wählen", B ="P ist volljährig", C ="P ist deutscher Staatsbürger".

(1. Satz) $A \Rightarrow B$,

die Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$ bedeutet "Minderjährige dürfen nicht wählen."

Die Verneinung ist $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ und bedeutet "Eine Person P darf wählen ohne volljährig zu sein."

(2. Satz) $(B \wedge C) \Rightarrow A$,

die Kontraposition $\neg A \Rightarrow (\neg B \vee \neg C)$ bedeutet "P darf nicht wählen. Also ist P minderjährig oder kein deutscher Staatsbürger."

Die Verneinung ist $B \wedge C \wedge \neg A$ und bedeutet "P ist volljähriger deutscher Staatsbürger und darf nicht wählen."

(3. Satz) $(B \wedge C) \Leftrightarrow A$,

für beide Richtungen kann eine Kontraposition formuliert werden. Die eine ist die im (2. Satz), die andere ist $(\neg B \vee \neg C) \Rightarrow \neg A$ und bedeutet "Minderjährige oder Nichtdeutsche dürfen nicht wählen."

Die Verneinung von $(B \vee C) \Leftrightarrow A$ ist $\neg(B \wedge C \Rightarrow A) \vee \neg(A \Rightarrow B \wedge C)$ bzw. $(B \wedge C \wedge \neg A) \vee A \wedge (\neg B \vee \neg C)$ und bedeutet "Manche volljährige deutsche Staatsbürger dürfen nicht wählen. Oder manche Leute, die wählen dürfen, sind minderjährig oder keine deutsche Staatsbürger."

Aufgabe 2:

Seien A, B und C Aussagen. Formulieren Sie die folgenden Aussagen um in dazu äquivalente Aussagen, die nur mit den Zeichen $\wedge, \vee$ und $\neg$ auskommen. Verwenden Sie dafür die Logikregeln aus der Vorlesung.

(1) $\neg(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow A$

(2) $\neg(A \Rightarrow B) \wedge C$

(3) $(A \Leftarrow B) \wedge B$

(4) $\neg(A \vee (A \Leftrightarrow B))$

Wie kann man diese Aussagen sprachlich ausdrücken?
Wie lauten die Verneinungen dieser Aussagen?

Lösung: Vor.: Es seien A, B und C Aussagen.

(1) Beh.: Es gilt $(\neg(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow A) \Leftrightarrow A$.

Bew.: Es ist

$$\begin{aligned}(\neg(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow A) &\Leftrightarrow (A \wedge (B \vee C)) \vee A \\ &\Leftrightarrow (A \vee A) \wedge (A \vee (B \vee C)) \text{ nach Logikregel Nr. 9} \\ &\Leftrightarrow A \wedge (A \vee B \vee C) \Leftrightarrow A.\end{aligned}$$

$\square$

Die Verneinung ist $\neg A$.

(2) Es gilt $(\neg(A \Rightarrow B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \wedge C$. (Umformung ist klar.)

Die Verneinung ist $\neg A \vee B \vee \neg C$.

(3) Beh.: Es gilt $(A \Leftarrow B) \wedge B \Leftrightarrow A \wedge B$.

Bew.:

$$\begin{aligned}(B \Rightarrow A) \wedge B &\Leftrightarrow (\neg B \vee A) \wedge B \\ &\Leftrightarrow (A \vee \neg B) \wedge B \\ &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg B \wedge B) \text{ nach Logikregel Nr. 8} \\ &\Leftrightarrow A \wedge B.\end{aligned}$$

$\square$

Die Verneinung ist $\neg A \vee \neg B$.

(4) Beh.: Es gilt $\neg(A \vee (A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow \neg A \wedge B$.

Bew.:

$$\begin{aligned}\neg(A \vee (A \Leftrightarrow B)) &\Leftrightarrow \neg(A \vee ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))) \\ &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \\ &\Leftrightarrow \neg A \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)) \\ &\Leftrightarrow \neg A \wedge (A \wedge \neg B) \vee \neg A \wedge (B \wedge \neg A) \\ &\Leftrightarrow \neg A \wedge B.\end{aligned}$$

$\square$

Die Verneinung ist $A \vee \neg B$.

Bemerkung: Es gibt mehrere mögliche Lösungen dieser Aufgaben. Ferner beachte man, dass die angegebenen Aussagenformeln in (1)–(4) keineswegs immer wahre Aussagen sind, sondern nur die Äquivalenz in den Behauptungen stets eine wahre Aussage ist, egal, welche Aussagen man für A, B, C einsetzt.

Aufgabe 3:

Welches Beweisverfahren wird in den folgenden Beweisen benutzt?
(Bem.: Das Zeichen $a \mid b$ heißt "a teilt b")
Vergleichen Sie die Beweise miteinander: Einmal rein äußerlich, andererseits auch inhaltlich: Wo wird direkt, wo indirekt argumentiert? (Wenn Sie nicht alles inhaltlich verstehen, ist das nicht so schlimm. Sie sollen hier nur Beispiele sehen, wie man logische Argumentationen "mathematisch" richtig aufschreiben kann.)

Satz 1: Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.
Beweis: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, etwa n, $n+1$, $n+2$, ist $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3 \cdot (n+1)$, also durch drei teilbar. $\square$

Lösung: direkter Beweis

Satz 2: Vor.: a, b, c seien aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
Beh.: $3 \mid a + b + c$.
Bew.: Laut Vor. ist $b = a + 1$ und $c = b + 1 = (a + 1) + 1 = a + 2$. Dann gilt: $a + b + c = a + (a+1) + (a+2) = 3a + 3 = 3 \cdot (a+1) \Rightarrow 3 \mid a + b + c$. $\square$

Lösung: direkter Beweis, etwas formaler aufgeschrieben

Satz 3: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Beweis: Angenommen, es gäbe nur die endlich vielen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$. Dann ist die natürliche Zahl $n := p_1 \cdot p_2 \cdots p_r + 1$ durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ teilbar. Da aber jede natürliche Zahl > 1 durch eine Primzahl (etwa der kleinste Teiler von n, der > 1 ist, vgl. Satz 4) teilbar sein muss, existiert noch eine weitere Primzahl, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Lösung: indirekter Beweis, die Annahme, die zum Widerspruch geführt wird, lautet "Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$."

Satz 4: Eine natürliche Zahl n ist durch eine Primzahl teilbar.
Bew.: Sei p der kleinste Teiler > 1, der n teilt. Dann ist p prim, denn wäre p zusammengesetzt aus zwei Faktoren $a, b > 1$, so wäre $a > 1$ ein Teiler von n, der kleiner ist als p, im Widerspruch zur Wahl von p. Also ist p prim. $\square$

Lösung: direkter Beweis, welcher einen indirekten (Unter-)Beweis enthält für die Zwischenbehauptung "$p \mid n$, $p > 1$, p minimal $\Rightarrow$ p Primzahl.", beginnt im Text bei "denn wäre..."

Satz 5: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.
Bew.: Ann.: $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_r\}$.

Betrachte $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, $\lightning$. $\square$

Bem.: Die Behauptung in Satz 4 ist auch als $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, p \in \mathbb{P} : p \mid n$ schreibbar.

Lösung: derselbe Beweis wie in Satz 3, etwas formaler aufgeschrieben

Satz 6: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.
Bew.: Wir konstruieren eine unendlich große Menge von Primzahlen wie folgt: Sei p_1 eine Primzahl, etwa $p_1 := 2$. Sind Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ gegeben, betrachte man $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, setze dann $p_{r+1} := p$. Auf diese Weise können unendlich viele Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ konstruiert werden. $\square$

Lösung: direkter Beweis (durch Konstruktion)