Lösung zum Übungsblatt Nr. 2, Besprechung am 10.9.2011

Aufgabe 1:

Sei $M = \{1, 2\}$ und $N = \{2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(1) $M \subseteq N$	(5) $\{2, 4\} \subseteq N$	(9) $M \cap N = 2$
(2) $N \subseteq M$	(6) $2 \in M$	(10) $N \cap M = \{2\}$
(3) $M = N$	(7) $3 \subseteq N$	(11) $N \setminus M = \{1\}$
(4) $M \neq N$	(8) $\{2, \{3, 4\}\} \subseteq N$	(12) $N \setminus M = \{3, 4\}$

Lösung: Sei $M = \{1, 2\}$ und $N = \{2, 3, 4\}$. Dann ist

(1) $M \subseteq N$ falsch	(5) $\{2, 4\} \subseteq N$ wahr	(9) $M \cap N = 2$ falsch
(2) $N \subseteq M$ falsch	(6) $2 \in M$ wahr	(10) $N \cap M = \{2\}$ wahr
(3) $M = N$ falsch	(7) $3 \subseteq N$ falsch	(11) $N \setminus M = \{1\}$ falsch
(4) $M \neq N$ wahr	(8) $\{2, \{3, 4\}\} \subseteq N$ falsch	(12) $N \setminus M = \{3, 4\}$ wahr

Aufgabe 2:

Ein paar Fragen zu Mengen:

(1) Warum kann die Menge $\{a, b, c\}$ weniger als 3 Elemente haben?

(2) Wieviele Elemente enthält die Menge $\{3, 4, 3\}$?

(3) Ist das eine Menge: $A := \{A\}$?

(4) Wieviele Elemente enthält folgende Menge: $\{\{2, 3, 4\}, \{4, 7\}\}$?

(5) Wieviele verschiedene Teilmengen hat die Menge $\{1, 2, 3\}$? Welche?

(6) Beweisen Sie folgende Aussage: $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Lösung: Antworten:

Zu (1): Wenn etwa $a = b$ ist, hat die Menge höchstens 2 Elemente.

Zu (2): 2

Zu (3): Nein, das ist Quatsch.

Zu (4): 2, nämlich $\{2, 3, 4\}$ und $\{4, 7\}$

Zu (5): 8, nämlich $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

Zu (6): Vor.: A, B seien Mengen.

Beh.: Dann gilt $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Bew.: Wir zeigen die beiden Richtungen "$\Rightarrow$" und "$\Leftarrow$".

Zu "$\Rightarrow$": Ist $x \in A = A \cap B$, so folgt $x \in A$ und $x \in B$, also ist $x \in B$.

Zu "$\Leftarrow$": Die Inklusion $A \cap B \subseteq A$ ist klar. Es gilt auch die Inklusion $A \cap B \supseteq A$, denn ist $x \in A$, so folgt $x \in B$ nach Voraussetzung, also ist $x \in A \wedge x \in B$, d. h. $x \in A \cap B$. $\square$

Noch eine andere Lösung (es gibt sehr viele Möglichkeiten, hier einen Beweis aufzuschreiben!):

Bew.: Wegen $A = A \cap B \subseteq B$ folgt "$\Rightarrow$". Zu "$\Leftarrow$": Gilt die Voraussetzung $A \subseteq B$, so folgt $A = A \cap A \overset{\text{Vor.}}{\subseteq} A \cap B \subseteq A$. Weil links und rechts dieser Inklusionskette A steht, gilt darin überall auch das Mengengleichheitszeichen. Es folgt $A = A \cap B$. $\square$

Aufgabe 3:

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?
Geben Sie Beweise dafür an.

Formulieren Sie auch von jeder Aussage ihre Negation.

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, y \in \mathbb{R}:\ x < y.$

(2) $\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R}:\ x < y.$

(3) $\forall\, x \in \mathbb{N}:\ 0 < x \Rightarrow x \geq 1.$

(4) $\forall\, x \in \mathbb{R}:\ 0 < x \Rightarrow x \geq 1.$

Lösung: Wir beweisen im folgenden: Es ist (1) wahr, (2) falsch, (3) wahr, (4) falsch.

Beh.: (1) ist wahr.

Bew.: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $y := x + 1 \in \mathbb{R}$ mit $y > x$. $\square$

Beh.: (2) ist falsch.

Bew.: Wir zeigen, dass die Negation von (2) richtig ist, s.u.

Beh.: (3) ist wahr.

Bew.: Sei $x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ positiv. Dann ist x mindestens gleich 1, also $x \geq 1$. $\square$

Beh.: (4) ist falsch.

Bew. mit einem Gegenbeispiel: Für $x := 0.5 \in \mathbb{R}$ ist $x > 0$ und $x < 1$. $\square$

Die Negationen lauten

$\neg$(1) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall\, y \in \mathbb{R}:\ x \geq y.$

$\neg$(2) $\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in \mathbb{R}:\ x \geq y.$

$\neg$(3) $\exists\, x \in \mathbb{N}:\ 0 < x \wedge x < 1.$

$\neg$(4) $\exists\, x \in \mathbb{R}:\ 0 < x \wedge x < 1.$

Bew.: Zu $\neg$ (2): Nach Vertauschen von x und y folgt die Aussage aus der von (1). Der Bew. von (1) überträgt sich.