Vorkurs Mathematik, PD Dr. K. Halupczok,
WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik 10.9.2013

# Lösung zum Übungsblatt Nr. 3, Besprechung am 12.9.2013

## Aufgabe 1:

Zeigen Sie den folgenden Satz mit vollständiger Induktion:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Schreiben Sie den Satz mitsamt Beweis so auf wie in der Vorlesung Beispiel Nr. 28/29.

**Lösung:** Beh.:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Beweis (durch vollständige Induktion):

Induktionsanfang: Sei $n = 1$, dann ist $l.S. = 1 \geq \sqrt{1} = r.S.$ wahr.

Induktionsschritt (von $n$ nach $n+1$): Sei die Aussage wahr für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} l.S.(n+1) &= \Big(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{Ind.vor.}}{\geq} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} = r.S.(n+1). \quad \square \end{aligned}$$

## Aufgabe 2:

Zeigen Sie:

(1) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ ist $n^2 > 2n + 1$.

(2) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ ist $2^n > n^2$.

(3) Die maximale Anzahl $g_n$ der Gebiete, in die die Ebene durch Einzeichnen von $n$ Geraden zerlegt werden kann, beträgt $g_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$.

**Lösung:** **Zu (1):** Bew. (direkt, geht schneller ohne vollständiger Induktion):

Ist $n \geq 3$ beliebig aber fest, so ist

$$\begin{aligned} n^2 > 2n+1 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 > 2 \Leftrightarrow (n-1)^2 > 2 \Leftrightarrow n - 1 > \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow n > 1 + \sqrt{2} \text{ wahr, weil } n \geq 3 > 1 + \sqrt{2} \text{ gilt.} \quad \square \end{aligned}$$

**Zu (2):** Bew. (mit vollständiger Induktion):

Induktionsanfang: Sei $n = 5$, dann ist $l.S. = 2^5 = 32 > 25 = 5^2 = r.S.$ eine wahre Aussage.

Induktionsschritt: Sei die Aussage richtig für ein $n \geq 5$. Dann stimmt sie auch für $n+1$, denn es ist $l.S.(n+1) = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{Ind.vor.}}{>} 2 \cdot n^2 > (n+1)^2 = r.S.(n+1)$, weil $2n^2 > n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 > 2n + 1$ gilt wegen Teil (1).

Also gilt die Aussage für alle $n \geq 5$. $\square$

**Zu (3):** Bew. (mit vollständiger Induktion):

Induktionsanfang: Sei $n = 1$, dann ist $g_1 = 2$, weil man durch Einzeichnen von $1$ Gerade in die Ebene $2$ Gebiete erhält, und es ist $2 = \frac{1 \cdot 2}{2} + 1 = r.S.$

Indukionsschritt (von $n$ nach $n+1$): Es gelte die Behauptung für beliebige $n$ Geraden, die man in die Ebene einzeichnen kann. Wir zeigen, dass dann die behauptete Formel auch für $n+1$ Geraden gilt:

Seien $n+1$ beliebige Geraden in der Ebene eingezeichnet, und auch so, dass die maximalmögliche Gebietsanzahl damit erreicht werden kann. Dann wähle man eine dieser Geraden aus, nenne sie $g$ und betrachte die übrigen $n$ Geraden. Nach Induktionsannahme zerlegen diese die Ebene in $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ viele Gebiete. Die ausgewählte Gerade $g$ schneidet die anderen Geraden in einer gewissen Zahl von Schnittpunkten. Diese Schnittpunkte zerlegen $g$ in Geradenabschnitte, die jeweils ein altes Gebiet zerlegen, man erhält für einen solchen Geradenabschnitt jeweils ein neues Gebiet hinzu. Die Anzahl der Geradenabschnitte muss dabei maximal sein, da wir von einer maximalen Gebietsteilung ausgegangen sind. Diese ist gleich $n+1$, da maximal $n$ Geraden die Gerade $g$ schneiden können. Die Anzahl der im Induktionsschritt dazukommenden Gebiete ist also gleich $n+1$, und wir haben deshalb insgesamt

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1) = \frac{n+1}{2}(n+2) + 1 = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} + 1 = r.S.(n+1)$$

viele Gebiete bei den betrachteten $n+1$ Geraden. Damit ist die behauptetete Formel auch für $n+1$ Geraden bestätigt. $\square$

## Aufgabe 3:

In Definition 17 wurde mit der Aussage

$$\forall\, c \in \mathbb{N} : \; c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c = 1$$

definiert, wann zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind. Wie kann man diese rein sprachlich ausdrücken? Schreiben Sie die formale Verneinung der Aussage auf und drücken Sie diese ebenfalls sprachlich aus.

Denken Sie daran, dass "$c \mid a$" und "$c \mid b$" ebenfalls Abkürzungen für Aussagen sind; diese enthalten einen Existenzquantor. Welche sind das? Wenn man diese Aussagen dann in die Aussage von Definition 17 einsetzt, wie lautet dann die formale Verneinung und ihre sprachliche Umsetzung?

**Lösung:** Die Aussage "$\forall\, c \in \mathbb{N} : (c \mid a \wedge c \mid b) \Rightarrow c = 1$" bedeutet: "Jede natürliche Zahl $c$, die $a$ und $b$ teilt, ist (notwendigerweise) gleich $1$."

Gleichwertig/äquivalent: "$\forall\, c \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \neg(c \mid a) \vee \neg(c \mid b)$, in Worten: "Jede natürliche Zahl $c \neq 1$ teilt $a$ nicht oder $b$ nicht."

Formale Verneinung:

$$\begin{aligned}
&\exists\, c \in \mathbb{N} : \neg((c \mid a \wedge c \mid b) \Rightarrow c = 1) \\
\Leftrightarrow &\exists\, c \in \mathbb{N} : (c \mid a \wedge c \mid b) \wedge c \neq 1 \\
\Leftrightarrow &\exists\, c \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : c \mid a \wedge c \mid b,
\end{aligned}$$

in Worten: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, die $a$ und $b$ teilt." Die Verneinung : "Es gibt keine natürliche Zahl $c \neq 1$, die $a$ und $b$ teilt", ist wieder gleichwertig zur Ursprungsaussage.

Wir hatten: $c \mid a \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Z} : a = cd$,

entsprechend $c \mid b \Leftrightarrow \exists\, e \in \mathbb{Z} : b = ce$.

Eingesetzt: $\forall\, c \in \mathbb{N} : (\exists\, d \in \mathbb{Z} : a = cd) \wedge (\exists\, e \in \mathbb{Z} : b = ce) \Rightarrow c = 1$.

Verneinung:

$$\begin{aligned}
&\exists\, c \in \mathbb{N} : (\exists\, d \in \mathbb{Z} : a = cd) \wedge (\exists\, e \in \mathbb{Z} : b = ce) \wedge (c \neq 1) \\
\Leftrightarrow\ &\exists\, c \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\ \exists\, d \in \mathbb{Z}\ \exists\, e \in \mathbb{Z} : a = cd \wedge b = ce.
\end{aligned}$$

In Worten: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, eine ganze Zahl $d$ und eine ganze Zahl $e$ mit $a = cd$ und $b = ce$."

Auch möglich: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, eine ganze Zahl $d$ und eine ganze Zahl $e$, so dass die Gleichungen $a = cd$ und $b = ce$ gelten."