Vorkurs Mathematik, PD Dr. K. Halupczok,
WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik 12.9.2013

Lösung zum Übungsblatt Nr. 4, Besprechung am 17.9.2013

Aufgabe 1:

Schreiben Sie die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen und beweisen Sie Ihre Behauptung:

$$\begin{aligned}
&A := \{x \in \mathbb{R};\ |x| < 3\},\\
&B := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 7\},\\
&C := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |2x-4| \geq 5\},\\
&D := \{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R};\ |x-1| \leq 2\},\\
&E := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |-x^2+1| \geq 2\}.
\end{aligned}$$

Lösung: **Zu** A: Es ist $A = (-3, 3)$, da $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Zu B: Es ist $B = (-\infty, -7) \cup (7, \infty)$, denn:

$x \in B \Leftrightarrow \neg(|x| \leq 7) \Leftrightarrow \neg(-7 \leq x \leq 7) \Leftrightarrow x < -7 \vee x > 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -7) \vee x \in (7, \infty)$.

Zu C: Es ist $C = (-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, denn:

$x \in C \Leftrightarrow \neg(|2x-4| \geq 5) \Leftrightarrow |2x-4| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x-4 < 5 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \wedge x < \frac{9}{2}$.

Zu D: Es ist $D = (-1, 2)$, denn:

$x \in D \Leftrightarrow x^2 < 4 \wedge |x-1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \wedge -2 \leq x-1 \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2, 2] \cap (-1, 3) = (-1, 2]$.

Zu E: Es ist $E = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, denn:

$x \in E \Leftrightarrow |-x^2+1| < 2 \Leftrightarrow -2 < -x^2+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < -x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x^2 < 3 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie das Supremum und Maximum der folgenden Mengen reeller Zahlen, falls existent, und geben Sie jeweils die Menge aller oberer Schranken an:

$$A := \{\pi, 1\}, \qquad D := \mathbb{N},$$

$$B := \left\{1 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad E := \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 3\},$$

$$C := \left\{\frac{x}{1+x};\ x \in \mathbb{R}, x > -1\right\}, \qquad F := \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 = 5\}.$$

Lösung: $\sup A = \pi$, $\max A = \pi$, $[\pi, \infty)$
$\sup B = 1$, $\max B$ ex. nicht, $[1, \infty)$
$\sup C = 1$, $\max C$ ex. nicht, $[1, \infty)$
$\sup \mathbb{N}$, $\max \mathbb{N}$ ex. nicht, $\emptyset$
$\sup E = \sqrt{3}$, $\max E$ ex. nicht, $[\sqrt{3}, \infty)$
$F = \emptyset$, $\sup F$ und $\max F$ ex. deshalb nicht, $\mathbb{R}$.

Bem.: Es ist $\{x \in \mathbb{R};\ \forall\, y \in F : y \leq x\} = \mathbb{R}$, denn die Bedingung $\forall\, y \in F : y \leq x$ ist immer wahr: Wird diese gelesen als $\forall\, y \in \mathbb{R} : y \in F \Rightarrow y \leq x$, so ist $y \in F$ falsch für alle $y \in \mathbb{R}$, also die Implikation insgesamt eine wahre Aussage.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

$$
\begin{array}{lllll}
a : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}, & a(1) = 1, & a(2) = 3, & a(3) = 3, & a(4) = 2 \\
b : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}, & b(1) = 1, & b(2) = 3, & b(3) = 3, & b(4) = 2 \\
c : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}, & c(1) = 1, & c(2) = 3, & c(3) = 4, & c(4) = 2 \\
d : \{1,2,3,4\} \to \{1,2\}, & d(1) = 1, & d(2) = 1, & d(3) = 2, & d(4) = 1 \\
e : \{1\} \to \{1,2,3,4,5\}, & e(1) = 5 & & &
\end{array}
$$

Lösung:

a ist surjektiv und nicht injektiv,
b ist nicht surjektiv und nicht injektiv,
c ist bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv,
d ist surjektiv und nicht injektiv,
e ist injektiv und nicht surjektiv.