Übungsblatt Nr. 5, Besprechung am 19.9.2013

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

$$a_n = (-1)^{n^2} \cdot \frac{1}{n}, \quad b_n = \begin{cases} n^3 \cdot \frac{1}{1-n} & \text{für } n \in \{13214, 13215, \ldots, 23535435\}, \\ 100 & \text{sonst}, \end{cases}$$
$$c_n = \Big(-\frac{3}{2}\Big)^n, \quad d_n = \Big(-\frac{2}{3}\Big)^n.$$

Aufgabe 2:

Ist die (rekursiv definierte) Folge $a_0 := 1$, $a_{n+1} := a_n + \frac{1}{a_n}$ konvergent? Stellen Sie eine Vermutung dazu auf und beweisen Sie diese.

Aufgabe 3:

(1) Berechnen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{k=1}^{10} (k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=21}^{30} ((k-20)^5 - (k-20)^7)$$

(2) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt

$$\prod_{k=2}^{n} \Big(1 + \frac{1}{k}\Big) = \frac{n+1}{2}$$

Aufgabe 4:

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion die *allgemeine Binomische Formel*:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0\ \forall\, a, b \in \mathbb{R} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Hinweis: Im Induktionsschritt benötigt man die Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten, nämlich

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ (vgl. auch Definition 33). Finden Sie eine geeignete Indexverschiebung so, dass Sie diesen Hinweis einsetzen können.

bitte wenden

Mal eine "schwerere" Aufgabe, kann ausgelassen werden:

Aufgabe 5*:

Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Berechnen Sie die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen von $x+y+z = n$, die zusätzlich noch die Bedingungen $x \leq y + z$, $y \leq z + x$ und $z \leq x + y$ erfüllen.