Lösung zum Übungsblatt Nr. 5, Besprechung am 19.9.2013

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

$$a_n = (-1)^{n^2} \cdot \frac{1}{n}, \quad b_n = \begin{cases} n^3 \cdot \frac{1}{1-n} & \text{für } n \in \{13214, 13215, \dots, 23535435\}, \\ 100 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$c_n = \Big(-\frac{3}{2}\Big)^n, \quad d_n = \Big(-\frac{2}{3}\Big)^n.$$

Lösung:

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, da $\frac{1}{n}$ Nullfolge und $(-1)^{n^2}$ beschränkt ist.
- Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 100, da die Folgenglieder für $n \geq 23535436$ konstant gleich 100 bleiben.
- Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, denn es gilt:
$$\forall\, c\ \exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, n_0\ \exists\, n > n_0 : |c_n - c| \geq \varepsilon_0.$$
Bew.: Für $c \in \mathbb{R}$ wähle $\varepsilon_0 := 1$. Für n gerade und groß (mind. einem n_0) ist $(\frac{3}{2})^n \geq c+1$, also ist $|c_n - c| = (\frac{3}{2})^n - c \geq \varepsilon_0$. $\square$
- Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0: Sei $\varepsilon > 0$, dazu $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist
$$|d_n - 0| = \Big(\frac{2}{3}\Big)^n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon. \quad \square$$

Bem.: Die Ungleichung $(\frac{3}{2})^n \geq c+1$ ist umformbar zu $\Leftrightarrow n\ln(3/2) \geq \ln(c+1) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(c+1)}{\ln(3/2)}$. Daher gilt sie ab der kleinsten ganzen Zahl n_0, die größer gleich $\frac{\ln(c+1)}{\ln(3/2)}$ ist, d. h. für alle $n \geq n_0$. Die Ungleichung $(\frac{2}{3})^n < \frac{1}{n}$ ab einem n_0 (hier geht schon $n_0 := 1$) lässt sich mit vollständiger Induktion beweisen: Für $n = 1, 2$ gilt sie, und gilt diese für n, dann auch für $n+1$ wegen

$$\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} = \frac{2}{3} \cdot \Big(\frac{2}{3}\Big)^n \overset{\text{Ind.Vor.}}{<} \frac{2}{3n} \leq \frac{1}{n+1}, \text{ da } \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \text{ für } n \geq 2 \text{ gilt.}$$

$\square$

Aufgabe 2:

Ist die (rekursiv definierte) Folge $a_0 := 1$, $a_{n+1} := a_n + \frac{1}{a_n}$ konvergent? Stellen Sie eine Vermutung dazu auf und beweisen Sie diese.

Lösung: Durch vollständige Induktion ergibt sich als erstes, dass alle $a_n \geq 1 > 0$ sind (denn $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \geq 1 + \frac{1}{a_n} > 1$.)

Daraus folgt $a_{n+1} \geq a_n$, also ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend.

Beh.: Die Folge ist divergent. Bew. (durch Widerspruch): Angenommen, die Folge wäre konvergent und hätte einen Grenzwert a. Da alle Folgenglieder ≥ 1 sind, muss dann auch $a \geq 1$ sein. Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen folgt $a_{n+1} \to a$, $a_n + \frac{1}{a_n} \to a + \frac{1}{a}$, wegen der Rekursion folgt dann $a = a + \frac{1}{a}$, was einen Widerspruch darstellt, denn diese Gleichung hat keine Lösung. Also war die Annahme falsch, d. h. die Folge hat keinen Grenzwert und ist daher divergent. $\square$

Aufgabe 3:

(1) Berechnen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=21}^{30}((k-20)^5 - (k-20)^7)$$

(2) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{n+1}{2}$$

Lösung: **Zu (1):** Wir machen in der zweiten Summe eine Indexverschiebung: Setzen wir dort $m := k - 20$, so ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=21}^{30}((k-20)^5 - (k-20)^7) \\
&= \sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{m=1}^{10}(m^5 - m^7) \\
&= \sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=1}^{10}(k^5 - k^7) \\
&= \sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k + k^5 - k^7) \\
&= \sum_{k=1}^{10} k \overset{\text{kl. Gauß}}{=} \frac{10 \cdot 11}{2} = 55.
\end{aligned}$$

Zu (2): Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Sei $n := 2$, dann ist $l.S.(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = r.S.(2)$.

Induktionsschritt: Sei die Aussage wahr für $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung), wir zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt: Es ist

$$\begin{aligned}
l.S.(n+1) &= \prod_{k=2}^{n+1}\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdot \prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{2} \\
&= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)+1}{2} = r.S.(n+1). \quad \square
\end{aligned}$$

Bem.: Die Aussage in (2) gilt auch für $n = 1$, dann ist die $r.S. = 1$, und auf der linken Seite steht ein "leeres Produkt", das keine Faktoren hat. Ein solches leeres Produkt setzt man per Definition auf den Wert 1.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion die *allgemeine Binomische Formel*:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, a, b \in \mathbb{R} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Hinweis: Im Induktionsschritt benötigt man die Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten, nämlich

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ (vgl. auch Definition 33). Finden Sie eine geeignete Indexverschiebung so, dass Sie diesen Hinweis einsetzen können.

Lösung: Bew. (durch vollständige Induktion):

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann ist $l.S. = a + b = a^1 b^0 + a^0 b^1 = r.S.$ richtig.

Induktionsvoraussetzung: Die Beh. gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, d. h. es gelte die Formel $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ für n und alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Induktionsschritt (von n nach $n+1$): Wir zeigen, dass – unter Annahme der Induktionsvoraussetzung – die Formel für $n+1$ dann auch wahr ist, wie folgt. Es ist

$$\begin{aligned}
l.S.(n+1) = (a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) &\overset{\text{Ind.vor.}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \cdot (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell+1} a^{n-\ell} b^{\ell+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right) a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \binom{n+1}{m} a^{n-m+1} b^m + b^{n+1} \\
&= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} a^{(n+1)-m} b^m = r.S.(n+1).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5*:

Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Berechnen Sie die Anzahl der positiven ganzzahligen Lösungen von $x+y+z=n$, die zusätzlich noch die Bedingungen $x \leq y+z$, $y \leq z+x$ und $z \leq x+y$ erfüllen.

Lösung: Wegen $z = n-x-y$ sind nur die Paare (x, y) zu zählen, mit denen die angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Da nur positive Lösungen erlaubt sind, muss $x+y<n$, $x>0$ und $y>0$ gelten.

Die Bedingungen führen so auf die Ungleichungen $x \leq n-x$, $y-x \leq n-x-y \leq x+y$.

Daher bewegt sich x in dem Rahmen $1 \leq x \leq \frac{n}{2}$ und y in $\frac{n}{2} - x \leq y \leq \frac{n}{2}$ mit $y > 0$ und $x+y<n$. Die Anzahl der Paare (x, y) ergibt sich somit als

$$\sum_{x \leq n/2} \sum_{\substack{y \leq n/2 \\ n/2-x \leq y < n-x}} 1.$$

Um dies zu berechnen, machen wir jetzt eine Fallunterscheidung:

1. Fall: Ist n ungerade, so ist diese Paaranzahl

$$= \sum_{x \leq (n-1)/2} \sum_{\substack{y \leq (n-1)/2 \\ n/2-x \leq y}} 1 = \sum_{x \leq (n-1)/2} x \overset{\text{kl. Gauß}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{8}.$$

2. Fall: Ist n gerade, so ist diese Paaranzahl

$$= \sum_{x \leq n/2} \sum_{\substack{y \leq n/2 \\ n/2-x \leq y < n-x}} 1 = \sum_{x < n/2} \sum_{\substack{y \leq n/2 \\ n/2-x \leq y}} 1 + \sum_{y < n/2} 1 = \sum_{x \leq n/2-1} (x+1) + \frac{n}{2} - 1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}+1\right) - 1 + \frac{n}{2} - 1 = \frac{1}{8} \cdot (n^2 + 2n + 4n - 16) = \frac{(n+8)(n-2)}{8}.$$