Lösung zum Übungsblatt Nr. 6, Besprechung am 24.9.2013

Aufgabe 1:

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ fest. Geben Sie (in Abhängigkeit von a, b, c) die Lösungsmenge der $x \in \mathbb{R}$ an, die die folgenden Gleichungen lösen.

$$a^{\ln(x^b)} = c, \quad x^x = 1, \quad (\ln(a))^x = b,$$
$$\exp(cx)^a = 2^b, \quad \ln\left(\frac{a}{e^{x-c}}\right) = b, \quad x^{2\ln(a)} = 2^b.$$

Lösung:

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ fest gewählt. Wir bestimmen für jede Gleichung die Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

- Es ist
$$a^{\ln(x^b)} = c \Leftrightarrow e^{\ln(x^b)\ln(a)} = c \Leftrightarrow e^{b\ln(a)\ln(x)} = e^{\ln(c)} \Leftrightarrow b\ln(a)\ln(x) = \ln(c)$$
$$\overset{a\neq 1}{\Leftrightarrow} \ln(x) = \frac{\ln(c)}{b\ln(a)} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{\ln(c)}{b\ln(a)}\right).$$
Für $a = 1$ ist die linke Seite in der Gleichung $b\ln(a)\ln(x) = \ln(c)$ gleich Null, die Lösbarkeit hängt dann von c ab. Es folgt:
$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\exp(\frac{\ln(c)}{b\ln(a)})\}, & \text{falls } a \neq 1, \\ \mathbb{R}_{>0}, & \text{falls } a = 1 \wedge c = 1, \\ \emptyset, & \text{falls } a = 1 \wedge c \neq 1. \end{cases}$$

- Vorbem.: Der Ausdruck x^x ist für $x \geq 0$ definiert, denn wir haben $0^0 := 1$ definiert. Damit können wir die Aufgabe wie folgt lösen, denn man beachte, dass $\ln(x)$ nicht für $x = 0$ definiert ist: $x^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{x\ln(x)} = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$, also ist hier $\mathbb{L} = \{0, 1\}$.

- Vorbem.: Der Ausdruck $(\ln(a))^x$ ist lediglich für $a > 1$ definiert. Wir bestimmen die Lösungsmenge für $a > 1$ wie folgt: Es ist $(\ln(a))^x = b \Leftrightarrow e^{x\ln(\ln(a))} = b = e^{\ln(b)} \Leftrightarrow x\ln(\ln(a)) = \ln(b)$. Die linke Seite ist gleich Null, wenn $\ln(a) = 1$, also wenn $a = e$ ist. Wieder wird eine Fallunterscheidung nötig:
$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\frac{\ln(b)}{\ln(\ln(a))}\}, & \text{falls } a \neq e, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } a = e \wedge b = 1, \\ \emptyset, & \text{falls } a = e \wedge b \neq 1. \end{cases}$$

- $\exp(cx)^a = 2^b \Leftrightarrow \exp(acx) = \exp b\ln(2) \Leftrightarrow acx = b\ln(2) \overset{ac\neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{b\ln(2)}{ac}$. Es ist daher
$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\frac{b\ln(2)}{ac}\}, & \text{falls } ac \neq 0, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } ac = 0 \wedge b = 0, \\ \emptyset, & \text{falls } ac = 0 \wedge b \neq 0. \end{cases}$$

- $\ln(\frac{a}{e^{x-c}}) = b \Leftrightarrow \frac{a}{e^{x-c}} = e^b \Leftrightarrow a = e^{b+x-c} \Leftrightarrow x + b - c = \ln(a) \Leftrightarrow x = \ln(a) - b + c$. Also ist $\mathbb{L} = \{\ln(a) - b + c\}$.

- $x^{2\ln(a)} = 2^b \Leftrightarrow e^{2\ln(a)\ln(x)} = e^{b\ln(2)} \Leftrightarrow 2\ln(a)\ln(x) = b\ln(2) \overset{a\neq 1}{\Leftrightarrow} \ln(x) = \frac{b\ln(2)}{2\ln(a)} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{b\ln(2)}{2\ln(a)}\right)$. Also ist

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\exp(\frac{b\ln(2)}{2\ln(a)})\}, & \text{falls } a \neq 1, \\ \mathbb{R}_{>0}, & \text{falls } a = 1 \wedge b = 0, \\ \emptyset, & \text{falls } a = 1 \wedge b \neq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2:

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, wobei $i^2 = -1$. Berechnen Sie weiter das komplex Konjugierte, den Betrag, das multiplikativ Inverse sowie das Quadrat dieser komplexen Zahlen.

$$\frac{1}{1-i}, \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad \frac{(1+2i)^2}{2+3i}, \quad \frac{1+2i}{(2+3i)^2}, \quad \left(\frac{4-i}{2+i}\right)^2.$$

Lösung: Bem.: Das komplex Konjugierte, der Betrag usw. wurde hier exemplarisch nur für die erste Zahl aufgeschrieben:

- $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{1-(-1)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Komplex Konjugiertes: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, Betrag: $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, Quadrat: $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{2} = \frac{i}{2}$, multiplikatives Inverses: $\frac{1}{1/2+i/2} = \frac{2(1-i)}{1^2-i^2} = 1 - i$.

- $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+(-1)}{2} = -i$.

- $\frac{(1+2i)^2}{2+3i} = \frac{(1+4i+4i^2)(2-3i)}{2^2+3^2} = \frac{1}{13}(-3+4i)(2-3i) = \frac{1}{13}(-6+12+9i+8i) = \frac{6}{13} + \frac{17}{13}i$.

- $\frac{1+2i}{(2+3i)^2} = \frac{(1+2i)(2-3i)^2}{(2^2+3^2)^2} = \frac{1}{13^2}(1+2i)(4-12i-9)$
$= \frac{(-1)}{13^2}(1+2i)(12i+5) = \frac{(-1)}{13^2}(5-24+10i+12i) = \frac{19}{13^2} - \frac{22}{13^2}i$.

- $\left(\frac{4-i}{2+i}\right)^2 = \frac{(4-i)^2(2-i)^2}{(4+1)^2} = \frac{1}{25}(8-1-4i-2i)^2 = \frac{1}{25}(7-6i)^2 = \frac{1}{25}(49-36-12\cdot 7i) = \frac{13}{25} - \frac{84}{25}i$.

Aufgabe 3:

Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Ebene:

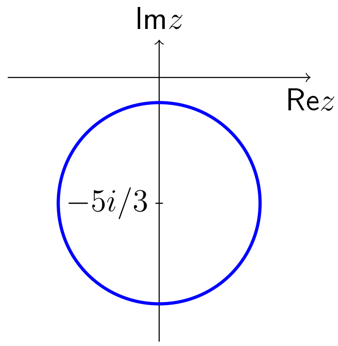
$$M := \left\{z \in \mathbb{C};\ \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 2\right\}$$

Lösung: Wir setzen $z = x + iy$, dann rechnen wir:

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\right|^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} = 4$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4(x^2 + (y+1)^2) \\
&\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 10y + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2
\end{aligned}
$$

Also ist M ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt $-5i/3$ und Radius $4/3$.



Aufgabe 4:

Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos z \in \mathbb{R}$, $\cos z \in [-1, 1]$, $\cos z = 1$?

Lösung: Mit dem Ansatz $z = x + iy$ erhalten wir die Darstellung

$$
\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\
&= \frac{1}{2}\big(e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin y)\big) \\
&= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) \cos x - \frac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}) i \sin x.
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich:

- $\cos z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee e^{y} - e^{-y} = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \vee y = 0$
- $\cos z \in [-1, 1] \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, denn der Fall $y \neq 0$ kann ausgeschlossen werden, da (s. vorhin) sonst $x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, also $|\cos x| = 1$, und $e^{y} + e^{-y} > 2$ wäre, also $\cos z$ reell und $|\cos z| > 1$. Genau für die reellen z ist also $\cos z \in [-1, 1]$, sonst nicht.
- Mit vorigem: $\cos z = 1 \Leftrightarrow z \in \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Überall sonst in $\mathbb{C}$ ist also $\cos z \neq 1$.