Letztes Übungsblatt Nr. 7, Besprechung am 26.9.2013

Aufgabe 1:

Die Stetigkeit einer Funktion f kann man einerseits mit dem ε-δ-Kriterium und andererseits mit dem Folgenkriterium (s. Vorlesung Def. 41 und Satz 11) definieren, beide Aussagen sind äquivalent.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$.
Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass f in 0 stetig ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$.
Zeigen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums, dass f in 1 stetig ist.

(c) Sei $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$. Zeigen Sie sowohl mit Hilfe des $\varepsilon-\delta$-als auch mit dem Folgenkriterium, dass f in 0 nicht stetig fortsetzbar ist (d. h., man kann $f(0)$ definieren, wie man will, f ist in 0 nicht stetig).

Aufgabe 2:

Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *streng monoton steigend*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Ein Satz aus der Analysis I besagt: Gilt für eine differenzierbare Funktion f, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f streng monoton steigend. Geben Sie diesen Satz in formalisierter Form wieder. Zeigen Sie auch, dass die Rückrichtung dieser Aussage nicht gilt.

Aufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n \ln(x)$, falls $n \neq -1$ und falls $n = -1$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) := (2x, 4x - y, 2x + 3y - z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung f^{-1} in derselben Form wie f an.

bitte wenden

Überprüfen Sie auch die linearen Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \alpha(x,y) := \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix},$$
$$\beta : \mathbb{C} \to \alpha(\mathbb{R}^2),\ \beta(x+iy) := \alpha(x,y),$$
$$\gamma : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \gamma(u,v,x,y,z) := \begin{pmatrix} u & v \\ x+y & z \end{pmatrix}$$

auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität.

Zum Abschluss des Vorkurses zum Nachdenken eine "Aufgabe zu einer Aufgabe", muss nicht besprochen werden:

Aufgabe 5*:

Gegeben sei die folgende Aufgabe:

"Auf wieviele Arten lässt sich ein Euro in Kleingeld umwechseln? Als Kleingeld kommen in Betracht: 1-, 2-, 5-, 10-, 20- und 50-Cent-Stücke."

Überlegen Sie sich, dass die gesuchte Zahl a_{100} der Koeffizient vor x^{100} in dem Polynom

$$\Big(\sum_{n=0}^{100} x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{50} x^{2n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{20} x^{5n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{10} x^{10n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{5} x^{20n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{2} x^{50n}\Big)$$

ist. Wie könnte man mit dieser Idee ähnliche "Geldwechselaufgaben" lösen?