Lösung zum Übungsblatt Nr. 7, Besprechung am 26.9.2013

Aufgabe 1:

Die Stetigkeit einer Funktion f kann man einerseits mit dem ε-δ-Kriterium und andererseits mit dem Folgenkriterium (s. Vorlesung Def. 41 und Satz 11) definieren, beide Aussagen sind äquivalent.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$.
Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass f in 0 stetig ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$.
Zeigen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums, dass f in 1 stetig ist.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$. Zeigen Sie sowohl mit Hilfe des $\varepsilon-\delta$-als auch mit dem Folgenkriterium, dass f in 0 nicht stetig fortsetzbar ist (d. h., man kann $f(0)$ definieren, wie man will, f ist in 0 nicht stetig).

Lösung:

(a) Beh.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ ist stetig in $c = 0$.

Bew. ($\varepsilon - \delta$-Kriterium): Z.z.: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} : |x| < \delta \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$.

Die zu erfüllende Ungleichung ist äquivalent zu $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ und ist für $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$ erfüllt.

(b) Beh.: $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ ist stetig in $c = 1$.

Bew. (Folgenkriterium): Z.z.: $\forall\, x_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 :\ \frac{1}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen 1 konvergiert. Dann konvergiert $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{1} = 1$ (nach Grenzwertregel Nr. 3 der Vorlesung). □

(c) Beh.: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ ist nicht stetig fortsetzbar in $x = 0$.

Bew.:

- ($\varepsilon - \delta$) Z.z.: $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |x| < \delta \wedge |\frac{1}{x} - a| \geq \varepsilon_0$.
Zu $a \in \mathbb{R}$ setze $\varepsilon_0 := 1$. Sei $\delta > 0$. Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\delta} < n_1$ und $n_2 \geq |a| + \varepsilon_0$. Dann setze $n := \max\{n_1, n_2\}$ und $x := \frac{1}{n}$. Es folgt $|x| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1} < \delta$ und $|\frac{1}{x} - a| = |n - a| \geq n - |a| \geq n_2 - |a| \geq |a| + \varepsilon_0 - |a| = \varepsilon_0$. □
- (Folgenkrit.) Z.z.: $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists$ Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $x_n \neq 0$, mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq a$, d. h. (dieser Grenzwert existiert nicht) oder (er existiert und ist $\neq a$).
Wähle $x_n := \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, dann ist $f(x_n) = n$ divergent. □

Aufgabe 2:

Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *streng monoton steigend*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Ein Satz aus der Analysis I besagt: Gilt für eine differenzierbare Funktion f, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f streng monoton steigend. Geben Sie diesen Satz in formalisierter Form wieder. Zeigen Sie, dass die Rückrichtung dieser Aussage nicht gilt.

Lösung:

Der Satz besagt in formalisierter Form:

Vor.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion.
Beh.: $(\forall\, x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0) \Rightarrow (\forall\, x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$

Beh.: Die Rückrichtung der vorigen Beh. gilt nicht, d. h. nicht für alle Funktionen f gilt die vorige Beh. mit "$\Leftarrow$" anstelle (des ersten) "$\Rightarrow$". Bew. durch Angabe eines Gegenbeispiels: Wir betrachten die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$. Dann ist f streng monoton steigend: Denn ist im 1. Fall $0 < x < y$, so folgt $x^3 < x^2 y < y^3$, ist im 2. Fall $x < y < 0$, so folgt $x^3 < xy^2 < y^3$, und im 3. Fall $x < 0 < y$, folgt $x^3 < 0 < y^3$. Aber an der Stelle $x = 0$ ist $f'(x) = f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. □

Aufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n \ln(x)$, falls $n \neq -1$ und falls $n = -1$.

Lösung: Beh.: Die Funktion hat für $n = -1$ die Stammfunktion $\frac{1}{2}(\ln(x))^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$, und hat für $n \neq -1$ die Stammfunktion $\frac{x^{n+1}}{n+1}\big(\ln(x) - \frac{1}{n+1}\big) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Bew.: Für $n = -1$ haben wir per Substitution

$$\int x^{-1} \ln(x) dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + C.$$

Für $n \neq -1$ zeigt partielle Integration mit $u = \ln(x), v' = x^n \Leftrightarrow u' = \frac{1}{x}, v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\int x^n \ln(x) dx &= \ln(x)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \\
&= \ln(x) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^n}{n+1} dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4:

Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) := (2x, 4x - y, 2x + 3y - z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung f^{-1} in derselben Form wie f an.

Überprüfen Sie auch die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned}
&\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \alpha(x,y) := \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \\
&\beta : \mathbb{C} \to \alpha(\mathbb{R}^2),\ \beta(x+iy) := \alpha(x,y), \\
&\gamma : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \gamma(u,v,x,y,z) := \begin{pmatrix} u & v \\ x+y & z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität.

Lösung: Die Abbildung f ist bijektiv, da sie injektiv und surjektiv ist.

injektiv: Ist $f(x,y,z) = f(u,v,w)$ für $(x,y,z),(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, so ist zu zeigen, dass $(x,y,z) = (u,v,w)$ folgt. Dies gelingt durch Lösen des entsprechenden linearen Gleichungssystems nach x,y,z leicht:

$$\begin{aligned}
&(2x, 4x-y, 2x+3y-z) = (2u, 4u-v, 2u+3v-w) \\
\Leftrightarrow\ & 2x = 2u \ \wedge\ 4x-y = 4u-v \ \wedge\ 2x+3y-z = 2u+3v-w \\
\Leftrightarrow\ & x = u \ \wedge\ y = v \ \wedge\ z = w \\
\Leftrightarrow\ & (x,y,z) = (u,v,w).
\end{aligned}$$

surjektiv: Ist $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ gegeben, so ist zu zeigen, dass es ein $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) = (a,b,c)$ gibt. Dies gelingt wieder mit einem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&(2x, 4x-y, 2x+3y-z) = (a,b,c) \\
\Leftrightarrow\ & 2x = a \ \wedge\ 4x-y = b \ \wedge\ 2x+3y-z = c \\
\Leftrightarrow\ & x = a/2 \ \wedge\ y = 2a-b \ \wedge\ z = a+3(2a-b)-c = 7a-3b-c
\end{aligned}$$

Bem.: In der Linearen Algebra lernt man Kriterien für die Injektivität usw. von linearen Abbildungen kennen. Damit gehen solche Überprüfungen einfacher: Zur Bijektivität genügt es hier zu zeigen, dass $f(x,y,z) = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$ gilt (das ist das Kriterium für die Injektivität, die Surjektivität folgt dann daraus "aus Dimensionsgründen").

Die Umkehrabbildung lässt sich an der Prüfung für die Surjektivität ablesen als $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f^{-1}(a,b,c) = (a/2, 2a-b, 7a-3b-c) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt:

- α ist nicht surjektiv, denn die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht im Bildbereich von α enthalten.

  Und es gilt $\alpha(x,y) = \alpha(u,v) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = u \ \wedge\ y = v$, also ist α injektiv.

- β ist bijektiv, denn β ist surjektiv aufgrund des erklärten Zielbereichs, und ist injektiv da $x = u \wedge y = v \Leftrightarrow x + iy = u + iv$ gilt.
- γ ist surjektiv, denn jede relle Zahl kann als $x+y$ geschrieben werden. Die Abbildung γ ist aber nicht injektiv, da $\gamma(0,0,1,0,0) = \gamma(0,0,0,1,0)$ und $(0,0,1,0,0) \neq (0,0,0,1,0)$ gilt.

Die Aufgabe zu einer Aufgabe als Abschluss des Vorkurses:

Aufgabe 5*:

Gegeben sei die folgende Aufgabe:

"Auf wieviele Arten lässt sich ein Euro in Kleingeld umwechseln? Als Kleingeld kommen in Betracht: 1-, 2-, 5-, 10-, 20- und 50-Cent-Stücke."

Überlegen Sie sich, dass die gesuchte Zahl a_{100} der Koeffizient vor x^{100} in dem Polynom

$$\left(\sum_{n=0}^{100} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{50} x^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{20} x^{5n}\right)\left(\sum_{n=0}^{10} x^{10n}\right)\left(\sum_{n=0}^{5} x^{20n}\right)\left(\sum_{n=0}^{2} x^{50n}\right)$$

ist. Wie könnte man mit dieser Idee ähnliche "Geldwechselaufgaben" lösen?

Lösung: Die beim Ausmultiplizieren der Klammern entstehenden Summanden sind von der Form $a_i x^i$, wobei $i \in \mathbb{N}$ ist: Entnimmt man jeder Klammer einen Summanden $x^{g_k n_k}$ mit $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$, $n_k \in \mathbb{N}_0$ und $g(1) = 1,\ g(2) = 2,\ g(3) = 5,\ g(4) = 10,\ g(5) = 20,\ g(6) = 50$, und multipliziert diese zusammen, so entsteht das Monom $x^i = x^{g_1 n_1 + \cdots + g_6 n_6}$. Der Koeffizient a_i gibt dann an, auf wieviele Arten i als eine solche Summe $g_1 n_1 + \cdots + g_6 n_6$ geschrieben werden kann. Dabei gibt n_k an, wie oft die k-te "Münze vom Centwert" g_k genommen wird, um i insgesamt als Geldwert zu erhalten. Daher gibt a_i an, wie oft der Geldwert i mit Centstücken dargestellt werden kann. Die gesuchte Zahl ist also a_{100}.

Wie berechnet man jetzt die Zahl a_{100}? Beim Versuch, die Rechnung von Hand durchzuführen, stellt man fest, dass das Ausmultiplizieren mühsam ist und nicht effektiver, als die Lösungen einfach "von Hand" durchzuzählen. Es gibt Möglichkeiten, effektiv zu einer numerischen Lösung zu kommen. Aber man kann diese Aufgabe aber auch leicht einem Computer-Algebraprogramm geben, hier etwa an Maple:

```
> f:= (1+sum (x^i, i = 1..100))*(1+sum(x^(2*i), i=1..50))*(1+sum(x^(5*i),i=1..\
> 20))*(1+sum(x^(10*i),i=1..10))*(1+sum(\
> x^(20*i),i=1..5))*(1+sum(x^(50*i),i=1..2));

[...]

> coeff(f,x,100);
                                  4562
```

Die gesuchte Lösung der Aufgabe lautet also $a_{100} = 4562$.

Der eingeschlagene Weg mit dem Polynomansatz taugt aber auch, wenn in der Aufgabe nach einem beliebem Geldwert i gefragt wird, es ist nur eine leichte Modifizierung nötig: Die hier angegebenen Polynome müssen dann zu entsprechend hohen Graden erweitert werden, wenn man a_i für große $i \in \mathbb{N}$ berechnen möchte. Und sicher geht es so für *jedes* $i \in \mathbb{N}$, wenn man zu den Potenzreihen

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} x^{g_k n_k} = \frac{1}{1 - x^{g_k}}$$

als Faktoren (für $k = 1, \ldots, 6$) übergeht.

Potenzreihen sind ein mächtiges kombinatorisches Werkzeug. So ist etwa die Identität

$$\Big(\sum_{n=0}^{9} x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{9} x^{10n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{9} x^{100n}\Big) \cdots = \frac{1}{1-x}$$

äquivalent zu dem Satz, dass jede natürliche Zahl auf genau eine Art im Dezimalsystem geschrieben werden kann.

Aufgabe: Beweisen Sie die eben genannte Identität direkt (mit der geometrischen Summenformel).