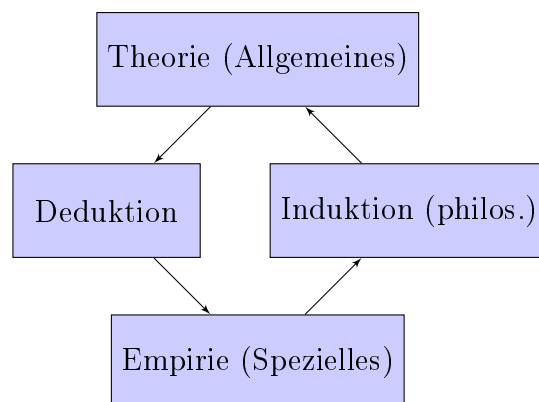


§0 Einführung

Denkanstoß: Was ist wissenschaftliches Denken?



Deduktion: Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere, d.h. Schlussfolgerung von gegebenen Prämissen auf logisch zwingende Konsequenzen, inklusive der formalen Ableitung von Ergebnissen (bzw. Herleitung) aus einer Theorie.

Induktion (philosophisch): Gewinnung von allgemeinen Erkenntnissen aus speziellen.

Theorie: Entwirft ein Bild eines Ausschnitts der Wirklichkeit, um diesen Teil der Wirklichkeit zu erklären.

Empirie: Die Sammlung/Erhebung von Informationen/Daten der Wirklichkeit, die beobachtet werden können in gezielten, systematischen Untersuchungen.

Die Mathematik gehört zu den nicht-empirischen Wissenschaften.

Wir werden in unserem Vorkurs auf das Studium in Mathematik vorbereiten. Dazu gehört, dass wir uns zuerst mit der Grundlage der Mathematik, der Aussagenlogik befassen und dabei die Sprache, in der Mathematik formuliert wird, kennen lernen. Aber wir werden auch einiges an Schulstoff dabei wiederholen bzw. uns einen ersten wissenschaftlichen Blick auf die Mathematik erarbeiten.

Ein kurzer Überblick über den Inhalt des Vorkurses:

- (1) Logik und Beweise
- (2) Elementare Mengenlehre
- (3) Zahlen und Zahlbereiche, vollständige Induktion
- (4) Elementare reelle Arithmetik, Ungleichungen und Intervalle
- (5) Abbildungen, Funktionen, Folgen, Summen und Grenzwerte
- (6) Die Exponentialfunktion, komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen
- (7) Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integration
- (8) Ausblick in die Lineare Algebra: Vektoren, Dimension, Matrizen

§1 Logik und Beweise

§1.1 Einige Grundlagen der Logik – Die Kunst des Schlussfolgerns

Definition 1: Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das wahr oder falsch sein kann.

Beispiel 1: Aussagen sind etwa: Es regnet. 3 ist eine gerade Zahl. Es gibt keine Känguruhs in Münster. Mathematik ist schwer zu erlernen. In Münster regnet es oder die Kirchenglocken läuten, und wenn beides gleichzeitig passiert, dann ist Sonntag.

Der Wahrheitsgehalt von Sätzen der Umgangssprache ist nicht immer leicht zu bestimmen, wie an diesen Beispielen zu sehen ist. Es gibt außerdem auch Aussagen, deren Wahrheitsgehalt unbekannt ist, wie etwa die folgende:

Beispiel 2: Jede natürliche gerade Zahl, die größer oder gleich 4 ist, ist Summe zweier Primzahlen. (Goldbachsche Vermutung seit 1742)

Bei manchen Aussagen kann auch angegeben werden, seit wann die Menschheit ihren Wahrheitsgehalt kennt, z. B.:

Beispiel 3: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat für $n \geq 3$ keine Lösungstriplet im Bereich der natürlichen Zahlen. (Fermatsche Vermutung seit 1637, bewiesen seit 1993 durch A. Wiles und R. Taylor, veröffentlicht 1995, heute: "Satz von Fermat-Wiles")

Die letzte Aussage in Bsp. 1 zeigt, dass Aussagen mit "und", "oder" verknüpft werden können, um neue Aussagen zu erhalten. Durch Verneinung können ebenfalls neue Aussagen gebildet werden. Offenbar gibt es dafür einige Bildungsgesetze, die universell sind. Diese Grundgesetze des Schlussfolgerns möchten wir uns zuerst erarbeiten.

Um in der Mathematik mit ihren Aussagen und den zugehörigen Wahrheitsgehalten vernünftig arbeiten zu können, liegt es nahe, einige wenige Aussagen als kleinste wahre Grundbausteine anzunehmen (das sind dann die Prämissen bzw. die Axiome), und zu versuchen, alle weiteren daraus abzuleiten, wofür dann die Regeln der Logik verwendet werden. Damit ist es dann einigermaßen leicht zu bestimmen, ob etwas wahr oder falsch ist, im Gegensatz zu Sätzen der Umgangssprache, deren Wahrheitsgehalt von allerlei weiteren Gegebenheiten (aktuelles Wetter, subjektive Meinung...) abhängen kann.

Und: Am besten möchte man dabei mit möglichst wenig Axiomen auskommen!

Die Mathematik untersucht dabei abstrakte Strukturen an sich auf ihre Eigenschaften und Muster. Die Abstraktion ist dabei das A und O, denn viele Eigenschaften von Gebilden wiederholen sich. Es ist dann sinnvoll, gemeinsame Eigenschaften mit Namen zu versehen (mittels Definitionen), und dann weitere Eigenschaften abzuleiten, die dann all diesen Gebilden gemeinsam sind.

Das Nützliche an der Mathematik ist, dass ihre Gesetze universell einsetzbar für viele denkbare Anwendungen ist. Diese Abstraktion ist es aber auch, die häufig schwer fällt, wenn man Mathematik lernt.

Ist eine Aussage A wahr, sagen wir auch kurz " A gilt", und ist A falsch, auch " A gilt nicht".

Wir überlegen uns nun, welche Verknüpfungen neuer Aussagen aus bestehenden Aussagen (nennen wir sie stellvertretend " A ", " B ", ...) gebildet werden können.

Definition 2: Die Verknüpfung zweier Aussagen A und B durch "und" und "oder" (w steht abkürzend für "wahr", f für "falsch"):

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Die Abkürzung $A \wedge B$ bedeutet hier A und B , die Abkürzung $A \vee B$ bedeutet A oder B .

Die Aussage $A \wedge B$ ist also genau dann wahr, wenn die beiden Aussagen A und B wahr sind, und sonst falsch. Die Aussage $A \vee B$ ist genau dann falsch, wenn beide Aussagen A und B falsch sind, und sonst wahr.

Für die Verneinung bzw. Negation führen wir auch ein abkürzendes Symbol ein:

Definition 3: Die Aussage $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist. (Man sagt "nicht A " für $\neg A$.)

Beispiel 4:

- Die Aussagen $A \vee (\neg A)$ und $\neg(A \wedge \neg A)$ sind immer wahr.
- Durch Kombination von \wedge, \vee, \neg kann eine Vielzahl weiterer Aussagen gebildet werden: $(A \wedge B) \vee (\neg C)$, $(A \vee B) \wedge C$, $(B \vee A) \wedge A$, ... Überlegen Sie sich, wie diese sprachlich ausgedrückt werden können, insbesondere wenn Sie A und B mit speziellen Aussagen belegen.
- Die Verknüpfung $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ kann man mit "entweder A oder B " ausdrücken.

Alle weiteren Verknüpfungen zweier oder mehr Aussagen, die denkbar sind, können aus \wedge, \vee und \neg kombiniert werden. Einige wichtige Verknüpfungen, die aber häufig vorkommen, bekommen einen neuen Namen und eine Abkürzung.

Die wichtigste solche ist dabei die Schlussfolgerung, bzw. Folgerung oder auch Implikation genannt:

Definition 4: Eine Implikation ist eine Aussage, die wir als $A \Rightarrow B$ schreiben, und die – abhängig vom Wahrheitsgehalt zweier Aussagen A und B – den folgenden Wahrheitsgehalt hat:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wir sagen dafür auch "aus der Aussage A folgt die Aussage B ", oder kurz "aus A folgt B ". Diese Aussage ist wahr, wenn A und B wahr ist (aber auch, wenn A falsch ist!).

Schlussfolgern geht nun so: "Gilt $A \Rightarrow B$ und A , so folgt B ".

Das heißt: Ist A wahr und auch die Aussage $A \Rightarrow B$ (d. h. für eine bestimmte Aussage B), so ist auch B wahr. Mit "gilt..." bzw. "gilt die Aussage...", ist gemeint, dass man die Wahrheit der Aussage A *annimmt*. Aus dieser wird dann auf die Wahrheit von B geschlossen.

Man kann das auch so sehen: Ist die Aussage $A \Rightarrow B$ wahr, so ist dies eine verwendbare *Schlussregel*. Gilt dann A (d. h. ist A wahr), so ist dann auch B wahr.

Man beachte dabei: $A \Rightarrow B$ ist stets wahr, wenn A falsch ist.

Es ist ein wichtiges logisches Prinzip, dass aus einer falschen Aussage A eine beliebige andere Aussage folgt: die Verknüpfung ergibt stets eine wahre Aussage ("ex falso quodlibet" = "aus Falschem folgt Beliebigen"). Denn als (mathematische) Aussage gesehen kann $A \Rightarrow B$ nur dann falsch sein, wenn A wahr und B falsch ist. Dies widerstrebt oft dem umgangssprachlichen Alltagsgebrauch von "wenn - dann", wo nicht vorgesehen ist, dass A auch falsch sein könnte.

Ein Beispiel dafür, wo wir sehen, dass diese Wahrheitstafel für $A \Rightarrow B$ mathematisch sinnvoll ist: Ein (math.) Satz lautet: Für alle reellen Zahlen x gilt: $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

Es ist mathematisch sinnvoll, dass man vereinbart, diese Aussage sei wahr für alle reellen x , die man für x in die "Formel" einsetzen kann:¹ Etwa für $x = 3$, dann lautet die Aussage " $3 > 2 \Rightarrow 3^2 > 4$ ", was offensichtlich wahr ist. Aber eben auch für alle anderen x , die man einsetzen kann, z.B. $x = 0$: Man erhält " $0 > 2 \Rightarrow 0^2 > 4$ ", ist wahr, obwohl beide Aussagen links und rechts des Pfeils falsch sind. Und auch für $x = -3$: " $-3 > 2 \Rightarrow (-3)^2 > 4$ ", wo die Aussage links falsch ist, die rechte aber wahr.

Bemerkung: Überlegen Sie sich, dass die Verknüpfung $(\neg A) \vee B$ denselben Wahrheitsgehalt hat wie die Aussage $A \Rightarrow B$. Wir können die Implikation $A \Rightarrow B$ also auch als Abkürzung für $(\neg A) \vee B$ verstehen.

Wichtige Dinge haben oft viele Namen. In einer Implikation $A \Rightarrow B$ nennt man A auch die hinreichende Bedingung für B , und B die notwendige Bedingung für A . Man sagt: A ist hinreichend dafür, dass B gilt, und B ist notwendig für die Gültigkeit von A . Auch "daraus folgt" oder "impliziert" kann für das Implikationszeichen gesagt werden. Die Hintereinanderreihung von mehreren Implikationen schreibt man auch einfach hintereinander, z. B. $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ als Abkürzung für $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$. Vergleichen Sie dies auch mit den Aussagen $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ und $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$!

¹So verstehen wir den Allquantor "für alle", vgl. §2.

Definition 5: Die Rückrichtung einer Implikation $A \Rightarrow B$ ist die Implikation $B \Rightarrow A$.

Die Rückrichtung ist i. a. eine andere Aussage mit anderen Wahrheitswerten. Falls mit einer Implikation auch die Rückrichtung gilt, spricht man von Äquivalenz:

Definition 6: Die Äquivalenz zweier Aussagen A und B ist die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Man schreibt dafür abkürzend $A \Leftrightarrow B$. In einer Äquivalenz nennt man die Implikation $A \Rightarrow B$ die Hinrichtung, und $B \Rightarrow A$ die Rückrichtung der Äquivalenz.

Man formuliert eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ auch so: "A ist genau dann wahr, wenn B gilt". Oder auch: "A gilt genau dann, wenn B gilt". Oder: "A gilt dann und nur dann, wenn B gilt". Das bedeutet alles, dass A und B denselben Wahrheitsgehalt besitzen. Die Hintereinanderreihung mehrerer Implikationen schreibt man auch kurz als $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \dots$ und ist die Aussage, dass alle diese Aussagen A, B, C, \dots denselben Wahrheitswert haben. Diese Hintereinanderreihung ist die Abkürzung für $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \wedge \dots$

Die wichtigsten Logikregeln beschreiben nun, wie Aussagen äquivalent umformuliert werden können (Regeln 1-4, 8 und 9) bzw. wie man mit gewissen Aussagen schließen kann (Regeln 5,6 und 7). Diese Regeln selbst sind immer wahre Aussagen, egal welche Aussagen A, B, C man einsetzt. Sie lassen sich durch Vergleich der jeweiligen Wahrheitswerte beweisen, oder auch durch Zurückführen auf schon bewiesene Aussagen. (Das behandeln wir im nächsten §1.2.)

1	$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$
2	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
3	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
4	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
5	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$
6	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
7	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
8	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
9	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Zum Klammersetzen bei Formeln mit Aussagen: Klammern können weggelassen werden gemäß folgenden Regeln: das Zeichen \neg bindet stärker als \wedge , das Zeichen \wedge bindet stärker als \vee , und das Zeichen \vee stärker als die Zeichen \Rightarrow, \Leftarrow bzw. \Leftrightarrow .

Beispiel 5:

- Demnach ist z. B. $(A \Rightarrow B) \wedge C$ prinzipiell eine andere Aussage als $A \Rightarrow B \wedge C$, mit welcher die Aussage $A \Rightarrow (B \wedge C)$ gemeint ist. Tatsächlich: Denn ist A eine falsche Aussage (setzen wir gewissermaßen den Wahrheitswert "falsch" für A ein), und C falsch, so ist die erste Aussage falsch, die zweite aber wahr, deswegen müssen sie verschieden sein. Um das zu erkennen, mussten wir also nur einen Unterschied in der Wahrheitstabelle finden.

- Um zu sehen, dass zwei Aussagen äquivalent sind, müssen wir hingegen die ganze Wahrheitstabelle durchchecken: Wir beweisen die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ durch Vergleich der Wahrheitswerte von $A \Rightarrow B$ und $\neg(A \wedge \neg B)$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w	w	f	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

§1.2 Theorie mathematischer Beweise

Definition 7: Eine Behauptung ist die Kundgebung, dass eine Aussage wahr ist, unabhängig von ihrem Wahrheitsgehalt. Dass sie tatsächlich wahr ist, wird mit einem Beweis bestätigt. Ein Beweis ist dabei die (fehlerfreie) Herleitung der Wahrheit einer Aussage (aus Axiomen und bereits als wahr bewiesenen Aussagen).

Definition 8: Ein (mathematischer) Satz ist die Formulierung einer wahren (mathematischen) Aussage: fast immer die Aussage, dass eine bestimmte Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist. Man nennt dann A die Voraussetzung, und B die Behauptung des Satzes.

In einem Satz wird also die Wahrheit einer Aussage behauptet, sofern sie bewiesen werden kann. Der Beweis steht meistens gleich im Anschluss an die Formulierung des Satzes; die Wahrheit eines Satzes muß nachvollziehbar sein. Wenn Sie ein Mathematikbuch aufschlagen, wird dies dort so gemacht, meist als Trio "Definition–Satz–Beweis". Denn für neu definierte Begriffe wird meist ein Satz formuliert, der deutlich macht, dass die Definition ein sinnvolles Konzept darstellt. Die Mathematik kann so als Sammlung von Sätzen aufgefasst werden.

Beispiel 6: Ein Beispiel für einen Satz, wie er in einem Mathematik-Buch stehen könnte:

Satz: Voraussetzung: Sei n eine gerade Quadratzahl. Behauptung: n ist durch 4 teilbar.

Beweis: Ist $n = m^2$ gerade, so ist m durch 2 teilbar, also $n = m \cdot m$ durch $2 \cdot 2 = 4$ teilbar. □

Oft stehen die Worte *Voraussetzung* und *Behauptung* nicht mehr in der Formulierung im Satz dabei. Dann muss man sich selbst überlegen, was Voraussetzung und was Behauptung des Satzes ist.

Beispiel 7: Im vorigen Beispiel könnte der Satz auch heißen: "Gerade Quadratzahlen sind durch 4 teilbar." Ein anderes Beispiel:

Satz: Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist halb so groß wie das Produkt zweier Seitenlängen.

Hier ist "Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck." die Voraussetzung, die Behauptung wäre: "Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt die Hälfte des Produkts zweier Seitenlängen."

Was ist nun genau ein Beweis? Wie leitet man die Wahrheit einer Aussage B her? Und: wie schreibt man das auf?

Ein Beweis der Aussage B könnte nun aus der Hintereinanderreihung von bereits bewiesenen Implikationen $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \cdots \Rightarrow C_{n+1} \Rightarrow B$ und einer anfänglichen Aussage A bestehen. Bei einem solchen Vorgehen spricht man von einem direkten Beweis.

Im Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ muss A selbst nicht bewiesen sein. Sie ist ohnehin wahr, wenn A falsch ist; es muss B nur dann hergeleitet werden, wenn A wahr ist, wir also die *Annahme* machen, dass A gilt; man drückt dies sprachlich im Konjunktiv I aus: Z.B. "Es sei x eine reelle Zahl", als Abkürzung für "Angenommen, es sei x eine reelle Zahl." oder "Wir nehmen an, x sei eine reelle Zahl."

Beispiel 8: Beispiel für die Notierung eines direkten Beweises:

Satz: Vor.: Sei x eine reelle Zahl mit $x^2 = 1$. Beh.: Dann ist $x = 1$ oder $x = -1$.

Bew.: Es gilt: $x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$. \square

Bemerkung: Hier könnte überall \Rightarrow auch durch \Leftrightarrow ersetzt werden, was für den Beweis des Satzes aber nicht erforderlich ist. Es sei denn, die Beh. lautet $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$.

Ein spezieller Beweistyp ist der Induktionsbeweis und wird zu den direkten Beweisen gezählt. Wir werden ihn erst in §2.1 kennenlernen.

Ein weiterer Beweistyp, der zu den direkten Beweisen gezählt wird, ist der Ringsschluss und kommt seltener vor. Nämlich dann, wenn eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ von drei Aussagen als Satz behauptet wird, genügt es, $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$ zu beweisen. Den Beweis der Rückrichtungen $A \Leftarrow B \Leftarrow C$ kann man sich dann sparen. (Mit mehr als drei Aussagen entsprechend.) Der Ringschluss sollte nicht mit dem Zirkelschluss verwechselt werden, bei dem fälschlicherweise die Gültigkeit der Behauptung im Beweis verwendet wird, was natürlich nicht erlaubt ist.

Alle anderen Beweisarten werden indirekt genannt. Das ist zum einen der Kontrapositionsbeweis, und zum anderen der Widerspruchsbeweis.

Beim Kontrapositionsbeweis wird anstelle von $A \Rightarrow B$ die gleichwertige² Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt gezeigt. Das Prinzip lässt sich auch als $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ schreiben, dieses ist oben als Logikregel Nr. 4 notiert.

Beim Widerspruchsbeweis wird aus der Annahme $\neg B$, d. h. dass B falsch wäre, eine falsche Aussage hergeleitet (ein sogenannter Widerspruch, wie etwa $0 = 1$, $A \wedge \neg A$ usw.). Nach dem Kontrapositionsprinzip ist B dann wahr, also bewiesen.

Im häufigen Fall, dass der zu beweisende Satz eine Implikation $A \Rightarrow B$ als Aussage hat, lautet die Annahme $A \wedge \neg B$. Dann wird *daraus* eine falsche Aussage direkt hergeleitet.³ Denn beachten Sie, dass $\neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg A \vee (\neg(\neg B)) \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$.

²d. h. äquivalente

³Dieser Widerspruch kann auch $\neg A$ sein: dies ist ein Widerspruch, da man ja die Wahrheit von A angenommen hat. In diesem Fall war der Widerspruchsbeweis dann doch ein Kontrapositionsbeweis und könnte auch so aufgeschrieben werden. Sogesehen ist ein Kontrapositionsbeweis nichts anderes als ein spezieller Widerspruchsbeweis.

Der Widerspruchsbeweis (zum Beweis einer Aussage B) wird so notiert, dass man die Annahme macht, dass $\neg B$ gelte. Nach der Herleitung eines Widerspruchs ist der Beweis dann beendet. Man schreibt dann auch, man erhält einen "Widerspruch". Gelegentlich schreibt man auch einen Widerspruchspfeil (" \perp ") an die erhaltene falsche Aussage.

In kurzen indirekten Beweisen kann man sprachlich den deutschen Konjunktiv II ("Irrealis") benutzen, mit dem im Deutschen eine irrealer Annahme ausgedrückt wird. In längeren Beweisen drückt meistens nur die Annahme selbst im Konjunktiv aus.

Beispiel 9: Beispielsätze, die den Konjunktiv (II bzw. I) enthalten:

1. "Wenn n ungerade wäre, dann wäre n^2 keine gerade Quadratzahl."
2. "Es sei n eine gerade Zahl.", ist die Abkürzung für "Angenommen, es sei n eine gerade Zahl." bzw. für "Wir nehmen an, n sei eine gerade Zahl."

Der Konjunktiv I von "es gilt" und "es ist" lautet "es gelte" und "es sei". Im Konjunktiv I wird häufig die Voraussetzung eines Satzes formuliert.

Zur Markierung des Endes eines Beweises schreibt man üblicherweise ein Kästchen an den rechten Seitenrand, oder die Abkürzung q.e.d. für "quod erat demonstrandum" = "was zu beweisen war", auf deutsch auch "w.z.b.w."

Beispiel 10: Beispiel für die Notierung eines Widerspruchsbeweises:

Satz: Vor.: Sei k eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, und $n := 10^k - 1$.

Beh.: Dann ist n keine Quadratzahl.

Beweis (indirekt, durch Widerspruch): Ann.: n wäre eine Quadratzahl.

Da $n = 10^k - 1$ ungerade ist, ist n also eine ungerade Quadratzahl. Ungerade Quadratzahlen sind von der Form $4m + 1$, also ist $10^k - 1 = 4m + 1$, also $10^k = 4m + 2$, also ist 10^k nicht durch 4 teilbar, im Widerspruch dazu, dass k mindestens gleich 2 ist und deswegen 10^k den Faktor 2 mindestens zweimal enthält. □

Beispiel 11:

- Satz: A, B seien Aussagen. Dann gilt $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Beweis (direkt): $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow B \vee \neg A \Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg A \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. □

- Satz: Vor.: A, B, C seien Aussagen.

Beh.: $(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$.

Beweis (direkt): $(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C$
 $\Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \Leftrightarrow \neg A \vee (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$. □

Bem.: Hier müssen die Äquivalenzpfeile hingeschrieben werden, Folgepfeile reichen nicht.

Beispiel 12: Satz: Wenn $x > 1$ und $y > -1$ reelle Zahlen sind, dann ist $x + y > 0$.

Beweis: Vor. $\Rightarrow x > 1 \wedge y > -1 \Rightarrow x + y > 1 + (-1) = 0$. □

Bem.: Der letzte Folgepfeil kann nicht durch einen Äquivalenzpfeil ersetzt werden! Die Rückrichtung gilt nicht, denn für $x = 0, y = 1$ ist $x + y = 1 > 0$ wahr, aber $x > 1$ falsch.

Beispiel 13:

Satz: Ist n eine ungerade Quadratzahl, dann ist $n - 1$ durch 8 teilbar.

oder: Satz: Es sei n eine ungerade Quadratzahl. Dann ist $n - 1$ durch 8 teilbar.

oder: Satz: Vor.: n sei ungerade Quadratzahl. Beh.: $n - 1$ ist durch 8 teilbar.

oder: Satz: Vor.: n sei eine Quadratzahl.

Beh.: Ist n ungerade, dann ist $n - 1$ durch 8 teilbar.⁴

Beweis (direkt): Es sei $n = m^2$ mit einer natürlichen Zahl m . Ist n ungerade, dann muss auch m ungerade sein, etwa von der Form $m = 2k - 1$ mit einer natürlichen Zahl k . Dann ist $n - 1 = m^2 - 1 = (2k - 1)^2 - 1 = 4k^2 - 4k + 1 - 1 = 4k(k - 1)$ durch 8 teilbar, weil k oder $k - 1$ gerade ist. \square

Beispiel 14: Ein weiteres Beispiel, wie ein Widerspruchsbeweis aufgeschrieben werden kann:

Satz: $p = 2$ ist die einzige gerade Primzahl.

Beweis (durch Widerspruch):

Annahme: Es sei $p > 2$ eine weitere gerade Primzahl. Dann ist p durch 2 teilbar, also $p = 2 \cdot n$ mit einer natürlichen Zahl n . Da $p > 2$, ist $n > 1$, also ist p eine zusammengesetzte Zahl im Widerspruch zur Annahme, dass p eine Primzahl sei. \square

Derselbe Beweis, etwas mehr in Formeln ("formal") aufgeschrieben:

Bew.: Ann.: Sei $p \in \mathbb{P}$, $2|p$ und $p > 2$. Dann $\exists n \in \mathbb{N} : p = 2 \cdot n$. Dann ist $n > 1$, weil $p > 2$. Dann ist p zusammengesetzt, \downarrow . \square

Ebenso, aber sprachlich ausgedrückt:

Beweis: Wäre p sonst eine weitere gerade Primzahl, so wäre die gerade Zahl p durch 2 teilbar, also keine Primzahl, im Widerspruch zur Annahme, dass p eine Primzahl sei. \square

Noch ein Beispiel für einen direkten Beweis:

Beispiel 15:

Satz: Vor.: Sei x eine reelle Zahl.

Beh.: Wenn $x^2 = 6x - 9$ ist, dann ist $x^2 = 9$.

Bew.: Es gilt:

$$\begin{aligned}x^2 &= 6x - 9 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \\ \Rightarrow x^2 &= 9.\end{aligned}$$

\square

Hier im letzten Schritt darf \Rightarrow nicht durch \Leftrightarrow ersetzt werden.

⁴Hier sehen Sie, dass Teile der Voraussetzungen in die Behauptung aufgenommen werden können, wenn damit die Behauptung als Implikation formuliert wird: $(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$.