Vorkurs Mathematik

WWU Münster Fachbereich Mathematik und Informatik

PD Dr. K. Halupczok

5.9.2013

VK2: Elementare Mengenlehre

Der grundlegendste Begriff, mit dem Objekte und Strukturen der Mathematik (Zahlen, geometrische Gebilde, Abbildungen usw.) definiert werden können, ist der Mengenbegriff.

Der grundlegendste Begriff, mit dem Objekte und Strukturen der Mathematik (Zahlen, geometrische Gebilde, Abbildungen usw.) definiert werden können, ist der Mengenbegriff.

Definition 9: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge.

Der grundlegendste Begriff, mit dem Objekte und Strukturen der Mathematik (Zahlen, geometrische Gebilde, Abbildungen usw.) definiert werden können, ist der Mengenbegriff.

Definition 9: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge.

Mengen können endlich oder unendlich sein. Endliche Mengen kann man, sofern sie nicht zuviele Elemente enthalten, durch *Aufzählung* ihrer Elemente angeben, üblicherweise in geschweiften Klammern wie etwa $\{3, 7, 2, 4\}$. Man beachte, dass $\{3, 7, 2, 4\} = \{3, 7, 2, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 7\}$: Zwei Mengen sind gleich genau dann, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Der grundlegendste Begriff, mit dem Objekte und Strukturen der Mathematik (Zahlen, geometrische Gebilde, Abbildungen usw.) definiert werden können, ist der Mengenbegriff.

Definition 9: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte heißen Elemente der Menge.

Mengen können endlich oder unendlich sein. Endliche Mengen kann man, sofern sie nicht zuviele Elemente enthalten, durch *Aufzählung* ihrer Elemente angeben, üblicherweise in geschweiften Klammern wie etwa $\{3, 7, 2, 4\}$. Man beachte, dass $\{3, 7, 2, 4\} = \{3, 7, 2, 3, 4\} = \{2, 3, 4, 7\}$: Zwei Mengen sind gleich genau dann, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Die Aussage, dass x ein Element einer Menge M ist, schreibt man als $x \in M$. Man schreibt $x \notin M$, wenn x kein Element von M ist, d. h. für die Aussage $\neg(x \in M)$.

Man kann eine Menge auch durch Beschreibung der *Eigenschaften* ihrer Elemente angeben: Ist $E(x)$ so eine Eigenschaft, so schreibt man für diese Menge $\{x \mid E(x)\}$. Hier ist $E(x)$ eine Formel, in der die Variable x vorkommt – wenn man spezielle x einsetzt ergibt $E(x)$ eine wahre oder falsche Aussage. Sie ist aber wahr genau für die Elemente der Menge: alle x, für die diese wahr ist, fasst man zu dieser Menge zusammen. Statt dem senkrechten Strich machen manche Autoren übrigens auch gerne einen Doppel- oder Strichpunkt. Ich selbst bevorzuge den Strichpunkt, schreibe also lieber $\{x;\ E(x)\}$.

Man kann eine Menge auch durch Beschreibung der *Eigenschaften* ihrer Elemente angeben: Ist $E(x)$ so eine Eigenschaft, so schreibt man für diese Menge $\{x \mid E(x)\}$. Hier ist $E(x)$ eine Formel, in der die Variable x vorkommt – wenn man spezielle x einsetzt ergibt $E(x)$ eine wahre oder falsche Aussage. Sie ist aber wahr genau für die Elemente der Menge: alle x, für die diese wahr ist, fasst man zu dieser Menge zusammen. Statt dem senkrechten Strich machen manche Autoren übrigens auch gerne einen Doppel- oder Strichpunkt. Ich selbst bevorzuge den Strichpunkt, schreibe also lieber $\{x;\ E(x)\}$.

Bemerkung: Für eine Funktion f (wir definieren "Funktion" später) ist auch die Schreibweise $\{f(x);\ E(x)\}$ üblich für die Menge der Funktionswerte, für die x die Eigenschaft $E(x)$ hat: Ist z. B. $f(x) = x^2$, so ist $\{f(x);\ x \in \mathbb{N}\} = \{x^2;\ x \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Quadratzahlen.

Beispiel 16: Ist $P(x)$ etwa die Eigenschaft "x ist eine Primzahl", so ist

$$\{2, 3, 5, 7\} = \{x;\ P(x) \wedge (x < 10)\}$$

die Menge der Primzahlen, die kleiner als 10 sind.

Beispiel 16: Ist $P(x)$ etwa die Eigenschaft "x ist eine Primzahl", so ist

$$\{2, 3, 5, 7\} = \{x;\ P(x) \wedge (x < 10)\}$$

die Menge der Primzahlen, die kleiner als 10 sind.

Die Menge ohne Elemente heißt die leere Menge und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Beispiel 16: Ist $P(x)$ etwa die Eigenschaft "x ist eine Primzahl", so ist

$$\{2, 3, 5, 7\} = \{x;\ P(x) \wedge (x < 10)\}$$

die Menge der Primzahlen, die kleiner als 10 sind.

Die Menge ohne Elemente heißt die <u>leere Menge</u> und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Achtung zum Umgang mit Mengen: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, ja für beliebige Mengen M gilt $M \neq \{M\}$, d. h. Mengen sind zu unterscheiden von Mengen(systemen), die diese Mengen als Elemente enthalten können.

Mengen, die durch Aufzählung oder per Eigenschaft der Elemente gegeben sind, möchte man mit Namen/einer Abkürzung versehen ("definieren"). Dazu verwendet man das Definitionszeichen $:=$, wie z. B. in $M := \{2, 3\}$. Danach kann man abkürzend M für die spezielle Menge $\{2, 3\}$ schreiben. Dabei darf das zu definierende Objekt nur auf der Seite des Doppelpunkts stehen, nicht auf der Seite des Gleichheitszeichens.

Mengen, die durch Aufzählung oder per Eigenschaft der Elemente gegeben sind, möchte man mit Namen/einer Abkürzung versehen ("definieren"). Dazu verwendet man das Definitionszeichen $:=$, wie z. B. in $M := \{2, 3\}$. Danach kann man abkürzend M für die spezielle Menge $\{2, 3\}$ schreiben. Dabei darf das zu definierende Objekt nur auf der Seite des Doppelpunkts stehen, nicht auf der Seite des Gleichheitszeichens.

Möchte man Aussagen definieren, nimmt man entsprechend das Zeichen $:\Leftrightarrow$ wie z. B. in $A(x) :\Leftrightarrow x$ ist grün.

Mengen, die durch Aufzählung oder per Eigenschaft der Elemente gegeben sind, möchte man mit Namen/einer Abkürzung versehen ("definieren"). Dazu verwendet man das Definitionszeichen $:=$, wie z. B. in $M := \{2, 3\}$. Danach kann man abkürzend M für die spezielle Menge $\{2, 3\}$ schreiben. Dabei darf das zu definierende Objekt nur auf der Seite des Doppelpunkts stehen, nicht auf der Seite des Gleichheitszeichens.

Möchte man Aussagen definieren, nimmt man entsprechend das Zeichen $:\Leftrightarrow$ wie z. B. in $A(x) :\Leftrightarrow x$ ist grün.

Damit kann man die Mengengleichheit definieren als:

$$M = N :\Leftrightarrow (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$$

Aussagen bzw. Formeln der Art $A(x)$, die von einer Variable x abhängen, möchte man oft zu Aussagen der Art "für alle x gilt $A(x)$" oder "es gibt ein x, für das $A(x)$ gilt" machen. Dafür benutzt man die Quantoren $\forall$ und $\exists$ (M sei hier eine Menge):

Aussagen bzw. Formeln der Art $A(x)$, die von einer Variable x abhängen, möchte man oft zu Aussagen der Art "für alle x gilt $A(x)$" oder "es gibt ein x, für das $A(x)$ gilt" machen. Dafür benutzt man die Quantoren $\forall$ und $\exists$ (M sei hier eine Menge):

$$(\forall\, x \in M : A(x)) :\Leftrightarrow \text{ Für alle } x \in M \text{ gilt } A(x).$$
$$(\exists\, x \in M : A(x)) :\Leftrightarrow \text{ Es gibt ein } x \in M, \text{ für das } A(x) \text{ gilt.}$$

Die Aussage mit $\forall$ ist wahr, wenn die Formel $A(x)$ immer eine wahre Aussage ergibt, egal welchen Wert $x \in M$ man einsetzt (das sollte man auch gerne tun und für manche selbstausgesuchten x einfach mal hinschreiben, um zum Verständnis für sich Beispiele zu untersuchen...). Sie ist falsch, sobald es nur ein einziges $x \in M$ gibt, für das durch Einsetzen in $A(x)$ eine falsche Aussage entsteht.

Die Aussage mit $\forall$ ist wahr, wenn die Formel $A(x)$ immer eine wahre Aussage ergibt, egal welchen Wert $x \in M$ man einsetzt (das sollte man auch gerne tun und für manche selbstausgesuchten x einfach mal hinschreiben, um zum Verständnis für sich Beispiele zu untersuchen...). Sie ist falsch, sobald es nur ein einziges $x \in M$ gibt, für das durch Einsetzen in $A(x)$ eine falsche Aussage entsteht.

Die Aussage mit $\exists$ ist wahr, wenn die Formel $A(x)$ für *mindestens* ein $x \in M$ eine wahre Aussage ergibt, die Formel muss nicht immer nur für genau ein einziges x wahr sein. Sie ist falsch, wenn für alle $x \in M$ durch Einsetzen in $A(x)$ eine falsche Aussage entsteht.

Die Aussage mit $\forall$ ist wahr, wenn die Formel $A(x)$ immer eine wahre Aussage ergibt, egal welchen Wert $x \in M$ man einsetzt (das sollte man auch gerne tun und für manche selbstausgesuchten x einfach mal hinschreiben, um zum Verständnis für sich Beispiele zu untersuchen...). Sie ist falsch, sobald es nur ein einziges $x \in M$ gibt, für das durch Einsetzen in $A(x)$ eine falsche Aussage entsteht.

Die Aussage mit $\exists$ ist wahr, wenn die Formel $A(x)$ für *mindestens* ein $x \in M$ eine wahre Aussage ergibt, die Formel muss nicht immer nur für genau ein einziges x wahr sein. Sie ist falsch, wenn für alle $x \in M$ durch Einsetzen in $A(x)$ eine falsche Aussage entsteht.

Das ist ein sehr wichtiges und nützliches Konzept, um neue Mengen zu beschreiben bzw. neue Mengen zu bilden.

Beispiel 17: Ist $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, so ist die Menge $\{x \in \mathbb{N};\ \exists\, y \in \mathbb{N} : x = y^2\}$ genau die Menge der Quadratzahlen.

Beispiel 17: Ist $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, so ist die Menge $\{x \in \mathbb{N};\ \exists\, y \in \mathbb{N} : x = y^2\}$ genau die Menge der Quadratzahlen.

Behandelt man Mengen und ihre Elemente mit bestimmten Eigenschaften, kommt man schnell zum Begriff der Teilmenge.

Definition 10: Eine Menge M ist Teilmenge einer Menge N (in Zeichen schreibt man diese Aussage als $M \subseteq N$), falls jedes Element von M auch eines von N ist. Formal:

$$M \subseteq N :\Leftrightarrow (\forall\, x \in M : x \in N)$$

Beispiel 17: Ist $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, so ist die Menge $\{x \in \mathbb{N};\ \exists\, y \in \mathbb{N} : x = y^2\}$ genau die Menge der Quadratzahlen.

Behandelt man Mengen und ihre Elemente mit bestimmten Eigenschaften, kommt man schnell zum Begriff der Teilmenge.

Definition 10: Eine Menge M ist Teilmenge einer Menge N (in Zeichen schreibt man diese Aussage als $M \subseteq N$), falls jedes Element von M auch eines von N ist. Formal:

$$M \subseteq N :\Leftrightarrow (\forall\, x \in M : x \in N)$$

(Rechen-)Regeln zum Umgang mit Teilmengen:

1	$M \subseteq M$
2	$M \subseteq N \wedge N \subseteq M \Rightarrow M = N$
3	$M \subseteq N \wedge N \subseteq L \Rightarrow M \subseteq L$

Beispiel 17: Ist $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, so ist die Menge $\{x \in \mathbb{N};\ \exists\, y \in \mathbb{N} : x = y^2\}$ genau die Menge der Quadratzahlen.

Behandelt man Mengen und ihre Elemente mit bestimmten Eigenschaften, kommt man schnell zum Begriff der Teilmenge.

Definition 10: Eine Menge M ist Teilmenge einer Menge N (in Zeichen schreibt man diese Aussage als $M \subseteq N$), falls jedes Element von M auch eines von N ist. Formal:

$$M \subseteq N :\Leftrightarrow (\forall\, x \in M : x \in N)$$

(Rechen-)Regeln zum Umgang mit Teilmengen:

1	$M \subseteq M$
2	$M \subseteq N \wedge N \subseteq M \Rightarrow M = N$
3	$M \subseteq N \wedge N \subseteq L \Rightarrow M \subseteq L$

Beachten Sie auch, dass $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M gilt.

Weitere übliche Mengenverknüpfungen werden wie folgt definiert:

Definition 11:

Schnitt zweier Mengen M und N:

$M \cap N := \{x;\ x \in M \wedge x \in N\}$

Weitere übliche Mengenverknüpfungen werden wie folgt definiert:

Definition 11:

Schnitt zweier Mengen M und N:

$M \cap N := \{x;\ x \in M \wedge x \in N\}$

Vereinigung zweier Mengen M und N:

$M \cup N := \{x;\ x \in M \vee x \in N\}$

Weitere übliche Mengenverknüpfungen werden wie folgt definiert:

Definition 11:

Schnitt zweier Mengen M und N:

$M \cap N := \{x;\ x \in M \wedge x \in N\}$

Vereinigung zweier Mengen M und N:

$M \cup N := \{x;\ x \in M \vee x \in N\}$

Differenz von zwei Mengen M und N:

$M \setminus N := \{x;\ x \in M \wedge x \notin N\}$

Weitere übliche Mengenverknüpfungen werden wie folgt definiert:
Definition 11:
Schnitt zweier Mengen M und N:
$M \cap N := \{x;\ x \in M \wedge x \in N\}$

Vereinigung zweier Mengen M und N:
$M \cup N := \{x;\ x \in M \vee x \in N\}$

Differenz von zwei Mengen M und N:
$M \setminus N := \{x;\ x \in M \wedge x \notin N\}$

Ist im letzten Fall $N \subseteq M$, so heißt $M \setminus N$ auch das Komplement von N in M. Zu $M \setminus N$ sagt man auch "M ohne N". Man sagt, M und N sind disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt. Die Vereinigung von disjunkten Mengen heißt disjunkte Vereinigung.

Wir formulieren jetzt Rechenregeln für Mengenverknüpfungen (seien A, B, C Mengen):

1	$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
2	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6	$A \cap A = A \cup A = A$
7	$A \cap (A \cup B) = A$
8	$A \cup (A \cap B) = A$

Wir formulieren jetzt Rechenregeln für Mengenverknüpfungen (seien A, B, C Mengen):

1	$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
2	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6	$A \cap A = A \cup A = A$
7	$A \cap (A \cup B) = A$
8	$A \cup (A \cap B) = A$

Woher weiß man nun, dass diese Regeln so stimmen? Man muss sie beweisen. Wir bringen hier exemplarisch den Beweis der 4. Regel, wie man ihn aufschreiben könnte:

Beispiel 18:
Satz: Voraussetzung: Seien A, B und C Mengen.

Behauptung: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Beweis: Es gilt:

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\quad \text{(wegen obiger Logikregel Nr. 8)} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}
$$

Also sind die beiden Mengen in der Behauptung gleich. $\square$

Bemerkung: Soll die Gleichheit zweier Mengen $M = N$ nachgewiesen werden, kann der Beweis auch in die beiden Teile $M \subseteq N$ und $M \supseteq N$ aufgeteilt werden, da in Anwendungen für beide Teile gänzlich verschiedene Beweise möglich sein können. Es wird dann 1.) $x \in M \Rightarrow x \in N$ und 2.) $x \in N \Rightarrow x \in M$ bewiesen.

Bemerkung: Soll die Gleichheit zweier Mengen $M = N$ nachgewiesen werden, kann der Beweis auch in die beiden Teile $M \subseteq N$ und $M \supseteq N$ aufgeteilt werden, da in Anwendungen für beide Teile gänzlich verschiedene Beweise möglich sein können. Es wird dann 1.) $x \in M \Rightarrow x \in N$ und 2.) $x \in N \Rightarrow x \in M$ bewiesen.

Man verknüpft mit $\cap$ und $\cup$ auch oft mehr als zwei Mengen miteinander, sagen wir $A_1, \ldots, A_n$. Dann definiert man

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i := \{x;\ \forall\ i \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_i\}$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := \{x;\ \exists\ i \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_i\}$$

Hierfür sind auch die Bezeichnungen $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ bzw. $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ üblich.

Eine ganz spezielle Mengenverknüpfung ist die Produktbildung von Mengen:

Definition 12: Das Produkt zweier Mengen M und N ist die Menge $M \times N := \{(x, y);\; x \in M \wedge y \in N\}$.

Eine ganz spezielle Mengenverknüpfung ist die Produktbildung von Mengen:

Definition 12: Das <u>Produkt</u> zweier Mengen M und N ist die Menge $M \times N := \{(x, y);\ x \in M \wedge y \in N\}$.

Dies ist die Menge der geordneten <u>Paare</u> (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$. Zwei Elemente (x, y) und (u, v) darin sind genau dann gleich, wenn $x = u$ und $y = v$ gilt. In Zeichen: $(x, y) = (u, v)$.

Eine ganz spezielle Mengenverknüpfung ist die Produktbildung von Mengen:
Definition 12: Das Produkt zweier Mengen M und N ist die Menge $M \times N := \{(x, y);\ x \in M \wedge y \in N\}$.

Dies ist die Menge der geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$. Zwei Elemente (x, y) und (u, v) darin sind genau dann gleich, wenn $x = u$ und $y = v$ gilt. In Zeichen: $(x, y) = (u, v)$.

Nimmt man mehr als zwei Mengen, so nennt man die Elemente nicht mehr Paare, sondern Tupel. (Bei drei oder vier Mengen sagt man aber auch Tripel bzw. Quadrupel.)

Eine ganz spezielle Mengenverknüpfung ist die Produktbildung von Mengen:
Definition 12: Das Produkt zweier Mengen M und N ist die Menge $M \times N := \{(x, y);\ x \in M \wedge y \in N\}$.

Dies ist die Menge der geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$. Zwei Elemente (x, y) und (u, v) darin sind genau dann gleich, wenn $x = u$ und $y = v$ gilt. In Zeichen: $(x, y) = (u, v)$.

Nimmt man mehr als zwei Mengen, so nennt man die Elemente nicht mehr Paare, sondern Tupel. (Bei drei oder vier Mengen sagt man aber auch Tripel bzw. Quadrupel.)

Für mehrere Mengen $M_1, \ldots, M_n$ definiert man also
$M_1 \times \cdots \times M_n := \{(x_1, \ldots, x_n);\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \in M_i\}$.

Eine ganz spezielle Mengenverknüpfung ist die Produktbildung von Mengen:
Definition 12: Das Produkt zweier Mengen M und N ist die Menge $M \times N := \{(x, y);\ x \in M \wedge y \in N\}$.

Dies ist die Menge der geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$. Zwei Elemente (x, y) und (u, v) darin sind genau dann gleich, wenn $x = u$ und $y = v$ gilt. In Zeichen: $(x, y) = (u, v)$.

Nimmt man mehr als zwei Mengen, so nennt man die Elemente nicht mehr Paare, sondern Tupel. (Bei drei oder vier Mengen sagt man aber auch Tripel bzw. Quadrupel.)

Für mehrere Mengen $M_1, \ldots, M_n$ definiert man also
$M_1 \times \cdots \times M_n := \{(x_1, \ldots, x_n);\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \in M_i\}$.

Man schreibt weiter auch $M^n := M \times \cdots \times M$ (man nimmt n mal die Menge M und bildet das Produkt aus n-Tupeln).

Im Gegensatz zu Mengen kommt es bei Tupeln sehr wohl auf die Reihenfolge (und Wiederholung) der Elemente an:

Im Gegensatz zu Mengen kommt es bei Tupeln sehr wohl auf die Reihenfolge (und Wiederholung) der Elemente an:

Beispiel 19: Es ist $\{2, 4, 3\} = \{2, 3, 4\}$, aber $(2, 4, 3) \neq (2, 3, 4)$.
Weiter ist $\{2, 3, 3\} = \{2, 3\}$, aber $(2, 3, 3) \neq (2, 3)$.

Im Gegensatz zu Mengen kommt es bei Tupeln sehr wohl auf die Reihenfolge (und Wiederholung) der Elemente an:

Beispiel 19: Es ist $\{2,4,3\} = \{2,3,4\}$, aber $(2,4,3) \neq (2,3,4)$. Weiter ist $\{2,3,3\} = \{2,3\}$, aber $(2,3,3) \neq (2,3)$.

Beispiel 20: Bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen (s. später), so kann man die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ anschaulich als ein kartesisches Koordinatensystem darstellen. Die Elemente $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ des $\mathbb{R}^2$ kann man als Punkte darin veranschaulichen, so, wie Sie das aus der Schule her kennen.

Das Arbeiten mit Quantoren bereitet Anfängern oft Schwierigkeiten, gerade wenn mehrere Quantoren im Spiel ist. Denn: Die Reihenfolge von Quantoren ist entscheidend! Vertauscht man Quantoren, entsteht normalerweise eine gänzlich andere Aussage:

Das Arbeiten mit Quantoren bereitet Anfängern oft Schwierigkeiten, gerade wenn mehrere Quantoren im Spiel ist. Denn: Die Reihenfolge von Quantoren ist entscheidend! Vertauscht man Quantoren, entsteht normalerweise eine gänzlich andere Aussage:

Beispiel 21: Sei T die Menge aller Töpfe und D die Menge aller Topfdeckel. Für $t \in T$ und $d \in D$ sei eine Aussage $P(d, t)$ gegeben, denken Sie an "auf den Topf t passt der Deckel d". Das Sprichwort "Auf jeden Topf passt ein Deckel" kann man damit formal ausdrücken mit

$$\forall\, t \in T \;\exists\, d \in D : P(d, t).$$

Das Arbeiten mit Quantoren bereitet Anfängern oft Schwierigkeiten, gerade wenn mehrere Quantoren im Spiel ist. Denn: Die Reihenfolge von Quantoren ist entscheidend! Vertauscht man Quantoren, entsteht normalerweise eine gänzlich andere Aussage:

Beispiel 21: Sei T die Menge aller Töpfe und D die Menge aller Topfdeckel. Für $t \in T$ und $d \in D$ sei eine Aussage $P(d, t)$ gegeben, denken Sie an "auf den Topf t passt der Deckel d". Das Sprichwort "Auf jeden Topf passt ein Deckel" kann man damit formal ausdrücken mit

$$\forall\, t \in T\ \exists\, d \in D : P(d, t).$$

Die Vertauschung der Quantoren, also

$$\exists\, d \in D\ \forall\, t \in T : P(d, t)$$

bedeutet etwas ganz Anderes, nämlich dass es einen Universaldeckel gibt, der auf jeden Topf passt. Im ersten Fall hängt d von t ab, im zweiten nicht.

Die Verneinung von Aussagen, die Quantoren enthalten, kommt häufig vor, und es ist sehr nützlich und wichtig, die folgenden Regeln dafür zu kennen:

1	$\neg(\exists\, x \in M : E(x)) \Leftrightarrow \forall\, x \in M : \neg E(x)$
2	$\neg(\forall\, x \in M : E(x)) \Leftrightarrow \exists\, x \in M : \neg E(x)$

Die Verneinung von Aussagen, die Quantoren enthalten, kommt häufig vor, und es ist sehr nützlich und wichtig, die folgenden Regeln dafür zu kennen:

1	$\neg(\exists\, x \in M : E(x)) \Leftrightarrow \forall\, x \in M : \neg E(x)$
2	$\neg(\forall\, x \in M : E(x)) \Leftrightarrow \exists\, x \in M : \neg E(x)$

Kurz ausgedrückt: Durch Verneinung des All-Quantors entsteht der Existenzquantor und durch Verneinung des Existenz-Quantors der All-Quantor. Das funktioniert natürlich auch bei mehreren Quantoren:

Die Verneinung von Aussagen, die Quantoren enthalten, kommt häufig vor, und es ist sehr nützlich und wichtig, die folgenden Regeln dafür zu kennen:

1	$\neg(\exists\, x \in M : E(x)) \Leftrightarrow \forall\, x \in M : \neg E(x)$
2	$\neg(\forall\, x \in M : E(x)) \Leftrightarrow \exists\, x \in M : \neg E(x)$

Kurz ausgedrückt: Durch Verneinung des All-Quantors entsteht der Existenzquantor und durch Verneinung des Existenz-Quantors der All-Quantor. Das funktioniert natürlich auch bei mehreren Quantoren:

Beispiel 22: Die Verneinung von "Auf jeden Topf passt ein Deckel" aus dem vorigen Beispiel ist

$$\neg(\forall\, t \in T\ \exists\, d \in D : P(d,t)) \Leftrightarrow (\exists\, t \in T\ \forall\, d \in D : \neg P(d,t))$$

Die Verneinung von Aussagen, die Quantoren enthalten, kommt häufig vor, und es ist sehr nützlich und wichtig, die folgenden Regeln dafür zu kennen:

1	$\neg(\exists\, x \in M : E(x)) \Leftrightarrow \forall\, x \in M : \neg E(x)$
2	$\neg(\forall\, x \in M : E(x)) \Leftrightarrow \exists\, x \in M : \neg E(x)$

Kurz ausgedrückt: Durch Verneinung des All-Quantors entsteht der Existenzquantor und durch Verneinung des Existenz-Quantors der All-Quantor. Das funktioniert natürlich auch bei mehreren Quantoren:

Beispiel 22: Die Verneinung von "Auf jeden Topf passt ein Deckel" aus dem vorigen Beispiel ist

$$\neg(\forall\, t \in T\ \exists\, d \in D : P(d,t)) \Leftrightarrow (\exists\, t \in T\ \forall\, d \in D : \neg P(d,t))$$

In Worten: Nicht für alle Töpfe gibt es einen passenden Deckel bzw. es gibt einen Topf, auf den kein Deckel passt (also ein Gegenbeispiel zu dem Sprichwort).

Noch ein paar Tipps zum Beweisen von Aussagen mit Quantoren:

- Ist ein Satz zu beweisen, der eine Existenz-Aussage macht, kann der Beweis durch (ev. konstruktive) Angabe des Elements durchgeführt werden.

Noch ein paar Tipps zum Beweisen von Aussagen mit Quantoren:

- Ist ein Satz zu beweisen, der eine Existenz-Aussage macht, kann der Beweis durch (ev. konstruktive) Angabe des Elements durchgeführt werden.
- Ist ein Satz zu beweisen, der eine All-Aussage macht, sagen wir für alle $x \in M$, so muss für ein beliebiges solches $x \in M$, das man sich beliebig, aber fest wählt, die Aussage verifiziert werden. Man könnte so vorgehen, der Reihe nach für alle $x \in M$ die Aussage zu zeigen, sofern M nicht zuviele Elemente hat. Oder man teilt M auf in geeignete Teilmengen und führt dann den Beweis nacheinander für die Elemente der Teilmengen. Man sagt dann, man macht eine Fallunterscheidung.

Noch ein paar Tipps zum Beweisen von Aussagen mit Quantoren:

- Ist ein Satz zu beweisen, der eine Existenz-Aussage macht, kann der Beweis durch (ev. konstruktive) Angabe des Elements durchgeführt werden.
- Ist ein Satz zu beweisen, der eine All-Aussage macht, sagen wir für alle $x \in M$, so muss für ein beliebiges solches $x \in M$, das man sich beliebig, aber fest wählt, die Aussage verifiziert werden. Man könnte so vorgehen, der Reihe nach für alle $x \in M$ die Aussage zu zeigen, sofern M nicht zuviele Elemente hat. Oder man teilt M auf in geeignete Teilmengen und führt dann den Beweis nacheinander für die Elemente der Teilmengen. Man sagt dann, man macht eine Fallunterscheidung.
- Ist eine Aussage zu widerlegen, die eine All-Aussage ist, so genügt die (ev. konstruktive) Angabe eines Gegenbeispiels/eines Ausnahmeelements.

Noch ein paar Tipps zum Beweisen von Aussagen mit Quantoren:

- Ist ein Satz zu beweisen, der eine Existenz-Aussage macht, kann der Beweis durch (ev. konstruktive) Angabe des Elements durchgeführt werden.
- Ist ein Satz zu beweisen, der eine All-Aussage macht, sagen wir für alle $x \in M$, so muss für ein beliebiges solches $x \in M$, das man sich beliebig, aber fest wählt, die Aussage verifiziert werden. Man könnte so vorgehen, der Reihe nach für alle $x \in M$ die Aussage zu zeigen, sofern M nicht zuviele Elemente hat. Oder man teilt M auf in geeignete Teilmengen und führt dann den Beweis nacheinander für die Elemente der Teilmengen. Man sagt dann, man macht eine Fallunterscheidung.
- Ist eine Aussage zu widerlegen, die eine All-Aussage ist, so genügt die (ev. konstruktive) Angabe eines Gegenbeispiels/eines Ausnahmeelements.
- Ist eine Aussage zu widerlegen, die eine Existenz-Aussage ist, so muss für jedes fragliche Element gezeigt werden, dass die Behauptung dafür nicht gilt.

Beispiel 23: Satz: Beh.: Es gibt eine Zahl der Form $2^{2^k} + 1$, $k \in \mathbb{N}$, die keine Primzahl ist. (Formal: $\exists\, k \in \mathbb{N} : 2^{2^k} + 1 \notin \mathbb{P}$, wenn $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}$ bezeichnet.)

Beispiel 23: Satz: Beh.: Es gibt eine Zahl der Form $2^{2^k}+1$, $k \in \mathbb{N}$, die keine Primzahl ist. (Formal: $\exists\, k \in \mathbb{N} : 2^{2^k}+1 \notin \mathbb{P}$, wenn $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}$ bezeichnet.)
Bew.: Die Zahl $2^{2^5}+1 = 641 \cdot 6700417$ ist nicht prim. $\square$

Beispiel 23: Satz: Beh.: Es gibt eine Zahl der Form $2^{2^k} + 1$, $k \in \mathbb{N}$, die keine Primzahl ist. (Formal: $\exists\, k \in \mathbb{N} : 2^{2^k} + 1 \notin \mathbb{P}$, wenn $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}$ bezeichnet.)
Bew.: Die Zahl $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$ ist nicht prim. $\square$

Beispiel 24: Vermutung von Fermat: Beh.: Alle Zahlen der Form $2^{2^k} + 1$, $k \in \mathbb{N}$, sind Primzahlen.

Beispiel 23: Satz: Beh.: Es gibt eine Zahl der Form $2^{2^k}+1$, $k \in \mathbb{N}$, die keine Primzahl ist. (Formal: $\exists\, k \in \mathbb{N} : 2^{2^k}+1 \notin \mathbb{P}$, wenn $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}$ bezeichnet.)
Bew.: Die Zahl $2^{2^5}+1 = 641 \cdot 6700417$ ist nicht prim. $\square$

Beispiel 24: Vermutung von Fermat: Beh.: Alle Zahlen der Form $2^{2^k}+1$, $k \in \mathbb{N}$, sind Primzahlen. Die Beh. ist falsch!
Gegenbeispiel: $2^{2^5}+1$ ist nicht prim, s.o.

Beispiel 23: Satz: Beh.: Es gibt eine Zahl der Form $2^{2^k}+1$, $k \in \mathbb{N}$, die keine Primzahl ist. (Formal: $\exists\, k \in \mathbb{N} : 2^{2^k}+1 \notin \mathbb{P}$, wenn $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}$ bezeichnet.)
Bew.: Die Zahl $2^{2^5}+1 = 641 \cdot 6700417$ ist nicht prim. $\square$

Beispiel 24: Vermutung von Fermat: Beh.: Alle Zahlen der Form $2^{2^k}+1$, $k \in \mathbb{N}$, sind Primzahlen. Die Beh. ist falsch!
Gegenbeispiel: $2^{2^5}+1$ ist nicht prim, s.o.

Beispiel 25: Satz: Beh.: Für alle natürlichen Zahlen $k \leq 4$ ist $2^{2^k}+1$ prim.

Beispiel 23: Satz: Beh.: Es gibt eine Zahl der Form $2^{2^k}+1$, $k \in \mathbb{N}$, die keine Primzahl ist. (Formal: $\exists\, k \in \mathbb{N} : 2^{2^k}+1 \notin \mathbb{P}$, wenn $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}$ bezeichnet.)
Bew.: Die Zahl $2^{2^5}+1 = 641 \cdot 6700417$ ist nicht prim. $\square$

Beispiel 24: Vermutung von Fermat: Beh.: Alle Zahlen der Form $2^{2^k}+1$, $k \in \mathbb{N}$, sind Primzahlen. Die Beh. ist falsch!
Gegenbeispiel: $2^{2^5}+1$ ist nicht prim, s.o.

Beispiel 25: Satz: Beh.: Für alle natürlichen Zahlen $k \leq 4$ ist $2^{2^k}+1$ prim. Bew.: Es ist $2^{2^1}+1 = 5$ prim, $2^{2^2}+1 = 17$ prim, $2^{2^3}+1 = 257$ prim, $2^{2^4}+1 = 65537$ prim. $\square$

Beispiel 26: Satz: Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 2^n gerade.

Beispiel 26: Satz: Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 2^n gerade.

Bew.: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig (aber fest: Man denke sich für n beliebige Zahlen wie 1, 100, 243725, 1000000 eingesetzt. Jede natürliche Zahl ist möglich). Dann ist $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ mit $2^{n-1} \in \mathbb{N}$, also ist 2^n durch 2 teilbar und daher gerade. $\square$

Beispiel 26: Satz: Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 2^n gerade.

Bew.: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig (aber fest: Man denke sich für n beliebige Zahlen wie 1, 100, 243725, 1000000 eingesetzt. Jede natürliche Zahl ist möglich). Dann ist $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ mit $2^{n-1} \in \mathbb{N}$, also ist 2^n durch 2 teilbar und daher gerade. $\square$

Beispiel 27: Vermutung: Beh.: Es gibt eine Zahl $k \leq 4$, für die $2^{2^k} + 1$ zusammengesetzt ist.

Beispiel 26: Satz: Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 2^n gerade.

Bew.: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig (aber fest: Man denke sich für n beliebige Zahlen wie 1, 100, 243725, 1000000 eingesetzt. Jede natürliche Zahl ist möglich). Dann ist $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ mit $2^{n-1} \in \mathbb{N}$, also ist 2^n durch 2 teilbar und daher gerade. $\square$

Beispiel 27: Vermutung: Beh.: Es gibt eine Zahl $k \leq 4$, für die $2^{2^k} + 1$ zusammengesetzt ist.

Die Beh. ist falsch! Denn für jedes $k \leq 4$ ist $2^{2^k} + 1$ prim, s.o.