§4 Elementare reelle Arithmetik, Ungleichungen und Intervalle

§4.1 Elementare Arithmetik in $\mathbb{R}$

Wir wollen nun weiter mit $\mathbb{R}$ rechnen und definieren noch, was Potenzen und Wurzeln sind, sowie geben ein paar Regeln der Potenzrechnung:

Definition 21: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man die n-te Potenz von a als $a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}}$, sowie $a^0 := 1$. Eine 2-te Potenz heißt auch Quadrat.

Für eine negative ganze Zahl $-n$, wenn $n \in \mathbb{N}$ ist, definieren wir $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$. Ist $x = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, definieren wir $a^x := \sqrt[k]{a^m}$ als diejenige nichtnegative reelle Zahl y, für die die Gleichung $y^k = a^m$ gilt (falls y existiert). Das Symbol $\sqrt[k]{}$ heißt k-te Wurzel. In einer Potenz a^r heißt a die Basis, und r der Exponent.

Hier die wichtigen Regeln der Potenzrechnung: ($a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x, y \in \mathbb{Q}$)

1	$a^x a^y = a^{x+y}$
2	$(ab)^x = a^x b^x$
3	$(a^x)^y = a^{xy}$
4	$a > 1 \Rightarrow (x < y \Leftrightarrow a^x < a^y)$

Achtung: $a^{(x^y)}$ ist fast immer eine andere Zahl als $(a^x)^y$. Z. B. ist $2^{(2^3)} = 2^8$, aber $(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6$. Lässt man die Klammern weg und schreibt a^{x^y}, so meint man damit den Ausdruck $a^{(x^y)}$.

Und wie definiert man Potenzen für reelle Hochzahlen? Also a^x für $a, x \in \mathbb{R}$?

Antwort: Das kann man über ein Supremum bzw. Grenzwert definieren. Wir benutzen dafür aber später die Exponentialfunktion, mit der das sehr elegant geht. Damit kann man dann auch Gleichungen vom Typ $a^x = y$ nach x auflösen, sofern a und y nichtnegativ sind. Auch eine Auflösung nach a wird dann möglich sein. Das machen wir in §3.3.

Beispiel 30: Zur Einübung und Anwendung der Rechenregeln für Potenzen vereinfachen wir die folgenden Ausdrücke ($x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

- $y^{-7} \cdot ((y^{-1})^{-2})^{-3} =$
- $\frac{(xy)^{-2}}{(xy^2)^{-3}} =$
- $\frac{6x^3y^2z^5}{12x^2y^3z^5} =$
- $\sqrt[3]{8} =$
- $\sqrt{1,21} =$
- $(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x})^2 \cdot x^{-1} =$

Beispiel 31: Wo ist der Fehler? Hier wird $2 = -2$ "bewiesen":

$2 = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{(-8)^2} = (-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2.$

Beispiel 32: Welche Kantenlänge hat ein Würfel, der 8 Milliarden Liter fasst?

§4.2 Ungleichungen

Bevor wir mit der Grenzwerttheorie in $\mathbb{R}$ loslegen können, brauchen wir noch Begriffe und Rechenregeln dafür. Wir wollen ja sagen können, was "immer näher" heißt, also Abstände messen können. Dafür greifen wir auf die Ordnungsrelation und ihre Rechenregeln zurück. Außerdem wird der Vollständigkeitsbegriff ja über die Ordnungsrelation definiert, deshalb braucht man auch ständig Rechenregeln für die Ordnungsrelation ("abschätzen..."), die Wichtigsten geben wir hier an: $(a, b, x, y \in \mathbb{R})$

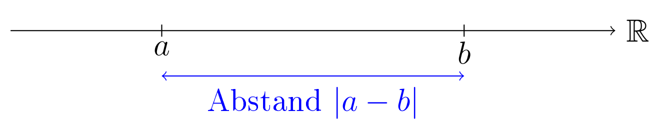
1	$x \leq y \Leftrightarrow (x < y \vee x = y)$
2	$x \leq y \wedge a \leq b \Rightarrow a + x \leq b + y$
3	$x \leq y \wedge a \geq 0 \Rightarrow a \cdot x \leq a \cdot y$
4	$x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
5	$0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

Definition 22: Der Betrag $|a|$ einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist wieder eine reelle Zahl und ist definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Definition 23: Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so bezeichnet $|a - b|$ den Abstand der beiden reellen Zahlen.

Abstände sind immer ≥ 0. Die reelle Zahl $|a - b|$ ist gerade der Abstand der zu a und b gehörigen Punkte auf der reellen Zahlengerade. Man veranschaulicht $\mathbb{R}$ nämlich gerne als Zahlenstrahl:



Oftmals stellt man sich reelle Zahlen am besten als Punkte auf dem Zahlenstrahl vor.

Für den Betrag gelten die folgenden Rechenregeln: $(a, b \in \mathbb{R})$

1	$-\lvert a\rvert \le a \le \lvert a\rvert$
2	$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$
3	$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$
4	$\lvert a\rvert \le b \Leftrightarrow -b \le a \le b$
5	$\lvert a+b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$

Die Regel Nr. 4 gilt hier auch mit $<$ statt $\le$.

Die letzte Ungleichung hier, Regel Nr. 5, heißt Dreiecksungleichung.

§4.3 Intervalle

Spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle, die wir wie folgt definieren:

Definition 24: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$. Dann ist

$$\begin{aligned}[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\} \text{ ein abgeschlossenes Intervall,}\\ (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\} \text{ ein offenes Intervall.}\end{aligned}$$

Entsprechend definiert man auch halboffene Intervalle $(a,b], [a,b)$. Abkürzend schreibt man

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R};\ x \le a\}, \qquad (b,\infty) := \{x \in \mathbb{R};\ x > b\}$$

usw. Beachten Sie dabei, dass die Symbole $\pm\infty$ hierbei nicht als Zahlen verstanden werden dürfen.

Zum Arbeiten/Rechnen mit Intervallen und Beträgen ist die folgende Übung als Einstieg lehrreich:

Beispiel 33: Schreiben Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen und beweisen Sie Ihre Behauptung:

(a) $\{x \in \mathbb{R};\ \lvert x\rvert < 3\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R};\ \lvert 4x\rvert > 1\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R};\ \lvert 1+x\rvert \le 2\}$

(d) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ \lvert x\rvert \le 7\}$

(e) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ \lvert 2x-4\rvert \ge 5\}$

(f) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ \lvert -x^2+1\rvert \ge 2\}$

(g) $\{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R};\ \lvert x-1\rvert \le 2\}$

(Sie können diese Teilmengen von $\mathbb{R}$ auch zeichnerisch am Zahlenstrahl darstellen.)

Als Beispiel zeigen wir, wie man die Lösung von (c) aufschreiben kann:

Beh.: Es gilt $\{x \in \mathbb{R};\ \lvert 1+x\rvert \le 2\} = [-3, 1]$.

Bew.: Es ist

$$\begin{aligned}\lvert 1+x\rvert \le 2 &\Leftrightarrow -2 \le 1+x \le 2 \text{ nach Betragsregel Nr. 4}\\ &\Leftrightarrow -3 \le x \le 1 \Leftrightarrow x \in [-3,1].\end{aligned}$$

□

Ein weiteres lehrreiches Beispiel ohne Beträge, aber mit auftauchenden quadratischen Termen:

Beispiel 34: **Beh.**: Es gilt $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\};\ \frac{x^2+1}{x-1} \geq 2x-1\} = (-\infty, 0] \cup (1, 3]$.

Bew.: Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+1}{x-1} \geq 2x-1 \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2+1 \geq (2x-1)(x-1), & \text{falls } x-1>0 \\ x^2+1 \leq (2x-1)(x-1), & \text{falls } x-1<0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x^2+1 \geq 2x^2-3x+1, & \text{falls } x>1 \\ x^2+1 \leq 2x^2-3x+1, & \text{falls } x<1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x^2-3x \leq 0, & \text{falls } x>1 \\ x^2-3x \geq 0, & \text{falls } x<1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x-3 \leq 0 \wedge x \geq 0, & \text{falls } x>1 \\ x-3 \geq 0 \wedge x \leq 0, & \text{falls } x>1 \\ x-3 \leq 0 \wedge x \leq 0, & \text{falls } x<1 \\ x-3 \geq 0 \wedge x \geq 0, & \text{falls } x<1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & 1 < x \leq 3 \ \vee x \leq 0 \text{ (denn Fälle 2 und 4 entfallen)} \\
\Leftrightarrow & x \in (-\infty, 0] \cup (1, 3].
\end{aligned}$$

□

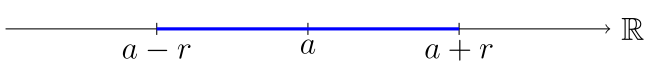
Beispiel 35: Für jede reelle Zahl a gilt $\sqrt{a^2} = |a|$.

Dies hilft z. B. in folgender Aufgabe:

Beh.: $\{x \in \mathbb{R};\ (x+1)^2 + 5 \leq 9\} = [-3, 1]$.

Bew.: Es ist $(x+1)^2 + 5 \leq 9 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x+1| \leq 2$, dann weiter wie bei (c). □

Beispiel 36: Eine Betragsungleichung der Form $|x-a| \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r$ hat für alle $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ das Intervall $[a-r, a+r]$ zur Lösung. Das Intervall ist die Menge aller reeller Zahlen, die als Punkte auf dem Zahlenstrahl interpretiert höchstens den Abstand r von der reellen Zahl a (als Punkt) haben. Das Intervall kann also geometrisch interpretiert werden als der eindimensionale Ball mit Mittelpunkt a und Radius r.



Beispiel 37: Im Prinzip können Ungleichungen in mehreren Variablen $x, y, \ldots$ ebenso behandelt werden wie hier beschrieben. Es wird aber oft wesentlich komplizierter. Hier nur ein wichtiges Beispiel:

Seien $a, b, r \in \mathbb{R}$ feste Zahlen mit $r > 0$. Wie im vorigen Beispiel ist dann $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\} = \{(x,y) \in [a-r, a+r] \times \mathbb{R};\ |(y-b)| \leq \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\}$ der Ball um $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit Radius r.

Er als Begrenzungen (d. h. als Rand) den Kreis

$$\begin{aligned}
&\{(x,y) \in [a-r, a+r] \times \mathbb{R};\ y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\} \\
\cup&\{(x,y) \in [a-r, a+r] \times \mathbb{R};\ y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\} \\
=&\{(x, b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [a-r, a+r]\}.
\end{aligned}$$