Vorkurs Mathematik

WWU Münster Fachbereich Mathematik und Informatik

PD Dr. K. Halupczok

17.9.2013

Wir beginnen mit folgender Definition:
Definition 25: Seien A, B Mengen. Eine Abbildung von A nach B ist eine Teilmenge f der Produktmenge $A \times B$ derart, dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$. Man schreibt dann $y = f(x)$ sowie $f : A \to B, x \mapsto f(x)$.

Wir beginnen mit folgender Definition:
Definition 25: Seien A, B Mengen. Eine Abbildung von A nach B ist eine Teilmenge f der Produktmenge $A \times B$ derart, dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$. Man schreibt dann $y = f(x)$ sowie $f : A \to B, x \mapsto f(x)$.

Man nennt dann $f(x)$ das Bild bzw. Wert von x unter der Abbildung f, B den Bild- oder Wertebereich, und A den Definitionsbereich der Abbildung f. Die Menge der $x \in A$ mit $f(x) = y$ heißt die Urbildmenge von y unter der Abbildung f.

Wir beginnen mit folgender Definition:

Definition 25: Seien A, B Mengen. Eine Abbildung von A nach B ist eine Teilmenge f der Produktmenge $A \times B$ derart, dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$. Man schreibt dann $y = f(x)$ sowie $f : A \to B, x \mapsto f(x)$.

Man nennt dann $f(x)$ das Bild bzw. Wert von x unter der Abbildung f, B den Bild- oder Wertebereich, und A den Definitionsbereich der Abbildung f. Die Menge der $x \in A$ mit $f(x) = y$ heißt die Urbildmenge von y unter der Abbildung f.

Für die Elemente von A und B sagt man in diesem Zusammenhang auch gelegentlich gerne "Punkte".

Denken Sie bei einer Abbildung an eine Zuordnung bzw. an eine Funktion, wie Sie diese schon in der Schule kennengelernt haben. Die Notation $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$ haben Sie vermutlich dort gesehen. Wichtig ist, dass auch wirklich *jedem* $x \in A$ ein $f(x) \in B$ zugeordnet werden kann.

Denken Sie bei einer Abbildung an eine Zuordnung bzw. an eine Funktion, wie Sie diese schon in der Schule kennengelernt haben. Die Notation $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$ haben Sie vermutlich dort gesehen. Wichtig ist, dass auch wirklich *jedem* $x \in A$ ein $f(x) \in B$ zugeordnet werden kann.

Nicht alle $z \in B$ müssen dabei getroffen werden; falls doch, nennt man die Abbildung surjektiv. Und nicht jedes Paar $x, y \in A$, $x \neq y$, muss verschiedene Bilder in B haben; falls doch, d. h. wenn

$$\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

gilt, nennt man die Abbildung injektiv. Ist eine Abbildung gleichzeitig surjektiv und injektiv, heißt sie bijektiv.

Tatsächlich haben wir bereits schon viele Abbildungen betrachtet: Ist $\mathcal{A}$ eine (geeignete) Menge von Aussagen, so kann man $\wedge, \vee, \neg$ als Abbildungen $\wedge, \vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bzw. $\neg : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ auffassen.

Tatsächlich haben wir bereits schon viele Abbildungen betrachtet: Ist $\mathcal{A}$ eine (geeignete) Menge von Aussagen, so kann man $\wedge, \vee, \neg$ als Abbildungen $\wedge, \vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bzw. $\neg : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ auffassen. Man kann auch eine Wahrheitswertabbildung $w : \mathcal{A} \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ betrachten; all das ist denkbar. Und unsere Verknüpfungen "+" und "$\cdot$" sind Abbildungen der Art $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Ordnungsrelation ist eine Abbildung der Art $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{A}$.

Tatsächlich haben wir bereits schon viele Abbildungen betrachtet:
Ist $\mathcal{A}$ eine (geeignete) Menge von Aussagen, so kann man $\wedge, \vee, \neg$ als Abbildungen $\wedge, \vee : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bzw. $\neg : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ auffassen.
Man kann auch eine Wahrheitswertabbildung
$w : \mathcal{A} \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ betrachten; all das ist denkbar. Und unsere Verknüpfungen "+" und "$\cdot$" sind Abbildungen der Art $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Die Ordnungsrelation ist eine Abbildung der Art $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{A}$.

Funktionen nennt man insbesondere Abbildungen, deren Wertebereich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ ist. Aber auch sonst sprechen Autoren von einer Funktion, wenn eine Abbildung vorliegt; das kommt ganz auf den Kontext an. Die Bildpunkte $f(x)$ nennt man dann auch Funktionswerte.

Beispiele für Funktionen sind (hier ist $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ usw.):

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := x^2$,
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto f(x) := x^2$,
- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto f(x) := \sqrt{x}$,
- $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto f(x) := 2^x$

Beispiele für Funktionen sind (hier ist $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ usw.):

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := x^2$,
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto f(x) := x^2$,
- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto f(x) := \sqrt{x}$,
- $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto f(x) := 2^x$

Die Begriffe injektiv und surjektiv werden häufig benutzt. Die Urbildmenge eines Punktes $z \in B$ kann leer sein, dann ist die Abbildung nicht surjektiv. Und unter einer injektiven Abbildung werden Punkte $z \in B$ von höchstens einem Urbildpunkt getroffen, d. h. die Urbildmenge ist dann einelementig oder leer.

Wird *jeder* Punkt $z \in B$ von genau einem Urbildpunkt getroffen, ist die Abbildung bijektiv. Dann stehen Punkte mit ihren Bildpunkten in eineindeutiger Beziehung zueinander: Jedem Punkt ist genau ein Bildpunkt zuzuordnen, aber auch umgekehrt. (Dann gibt es auch eine zugehörige Umkehrabbildung g, die über die Eigenschaft $\forall\, x \in A : g(f(x)) = x$ definiert ist; für diese gilt ebenso $\forall\, y \in B : f(g(y)) = y$.)

Wird *jeder* Punkt $z \in B$ von genau einem Urbildpunkt getroffen, ist die Abbildung bijektiv. Dann stehen Punkte mit ihren Bildpunkten in eineindeutiger Beziehung zueinander: Jedem Punkt ist genau ein Bildpunkt zuzuordnen, aber auch umgekehrt. (Dann gibt es auch eine zugehörige Umkehrabbildung g, die über die Eigenschaft $\forall\, x \in A : g(f(x)) = x$ definiert ist; für diese gilt ebenso $\forall\, y \in B : f(g(y)) = y$.)

Sie können bei obigen Beispielen mal überlegen, welche Funktionen injektiv, surjektiv, bijektiv sind; insbesondere, wenn Sie statt der Bild- und Definitionsbereiche Intervalle oder andere Mengen reeller Zahlen untersuchen. Was sind die Umkehrabbildungen in den Beispielen, wo eine Bijektion vorliegt? Machen Sie sich die Begriffe auch in Beispielen mit endlichen Bild- und Definitionsbereichen bewusst.

Man nennt eine Menge M abzählbar unendlich, falls es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt. Ein Beispiel ist die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen; es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie man eine solche Abbildung f angeben kann, also eine "Abzählung" f. Die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ hingegen ist ein Beispiel für eine überabzählbar unendliche Menge, d. h. $\mathbb{R}$ kann prinzipiell nicht abgezählt werden.

Man nennt eine Menge M abzählbar unendlich, falls es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt. Ein Beispiel ist die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen; es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie man eine solche Abbildung f angeben kann, also eine "Abzählung" f. Die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ hingegen ist ein Beispiel für eine überabzählbar unendliche Menge, d. h. $\mathbb{R}$ kann prinzipiell nicht abgezählt werden.

Dies beweist man mit folgendem Widerspruchsbeweis, der hier leicht verkürzt wiedergegeben ist: Angenommen, man hätte die reellen Zahlen im Intervall $(0, 1)$ durchgezählt als $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Die Dezimaldarstellung (ohne 9er-Periode) der Zahl x_n sei $0, x_{n,1} x_{n,2} x_{n,3} \ldots$; die $x_{n,i}$ stellen dabei Ziffern von 0 bis 9 dar.

Man betrachte nun eine reelle Zahl a, die $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ als Dezimaldarstellung hat und für die $a_1 \neq x_{1,1}$, $a_2 \neq x_{2,2}$, $a_3 \neq x_{3,3} \ldots$ gilt; so eine Zahl a ist leicht zu konstruieren: Die Ziffer a_i definiere man als irgendeine Ziffer außer $x_{i,i}$ und außer 9. (Keine 9, damit die Zifferndarstellung nicht in einer 9erperiode endet!)

Man betrachte nun eine reelle Zahl a, die $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ als Dezimaldarstellung hat und für die $a_1 \neq x_{1,1}$, $a_2 \neq x_{2,2}$, $a_3 \neq x_{3,3} \ldots$ gilt; so eine Zahl a ist leicht zu konstruieren: Die Ziffer a_i definiere man als irgendeine Ziffer außer $x_{i,i}$ und außer 9. (Keine 9, damit die Zifferndarstellung nicht in einer 9erperiode endet!) Durch Ziffernabgleich ist zu sehen, dass die Zahl a dann nicht in der Auflistung $x_1, x_2, x_3, \ldots$ vorkommen kann, im Widerspruch zur Annahme, dass die Auflistung $x_1, x_2, \ldots$ bereits *alle* reellen Zahlen im Intervall $(0, 1)$ aufzählt. (Dieser Beweis ist als (zweites) Cantorsches Diagonalargument bekannt.)

Die wichtigsten elementaren Grundfunktionen überhaupt sind die Polynomfunktionen:

Definition 26: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Eine Funktion f mit der Bildungsvorschrift

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

heißt ein <u>Polynom n-ten Grades</u> mit den <u>Koeffizienten</u> $a_0, \ldots, a_n$. Die Zahl a_n heißt <u>Hauptkoeffizient</u>, die Zahl a_0 heißt <u>konstantes Glied</u> von f.

Die wichtigsten elementaren Grundfunktionen überhaupt sind die Polynomfunktionen:

Definition 26: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Eine Funktion f mit der Bildungsvorschrift

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

heißt ein Polynom n-ten Grades mit den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$. Die Zahl a_n heißt Hauptkoeffizient, die Zahl a_0 heißt konstantes Glied von f.

Beispiel 38: Die linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, die im Koordinatensystem Geraden darstellen, sind Beispiele für Polynome. Aber auch z. B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7x^3 - 2x + 1$ ist ein Polynom. Die konstante Funktion $f(x) = c$ mit $c \neq 0$ fest gewählt ist ein Polynom 0-ten Grades, dem Nullpolynom $f(x) = 0$ wird kein Grad zugeordnet (manchmal der Grad $-\infty$).

Abbildungen, Funktionen, Folgen, Summen und Grenzwerte

- Abbildungen und Funktionen
- Folgen und Summen
- Grenzwerte von Folgen, Summen und Funktionswerten

Unsere Annäherung an $\sqrt{2}$ mit Dezimalbrüchen am Ende von §2.4 ist bereits ein Beispiel für eine (Zahlen-)folge. Wir wollen jetzt über Grenzwerte von Folgen sprechen. Mit dem Abbildungsbegriff können wir den Begriff "Folge" reeller Zahlen nun wie folgt definieren:

Unsere Annäherung an $\sqrt{2}$ mit Dezimalbrüchen am Ende von §2.4 ist bereits ein Beispiel für eine (Zahlen-)folge. Wir wollen jetzt über Grenzwerte von Folgen sprechen. Mit dem Abbildungsbegriff können wir den Begriff "Folge" reeller Zahlen nun wie folgt definieren:

Definition 27: Eine Folge a ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Die Werte $a(n)$ von $n \in \mathbb{N}$ notiert man auch in der Form $a_1, a_2, a_3, \ldots$, und die Folge notiert man als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Zahlen a_n heißen auch Folgenglieder.

Beispiel 39:

- Folge der Quadratzahlen: $1, 4, 9, 16, \ldots$ bzw. $q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $q(n) := n^2$.

Beispiel 39:

- Folge der Quadratzahlen: $1, 4, 9, 16, \dots$ bzw. $q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $q(n) := n^2$.
- Folge der Stammbrüche: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ bzw. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $s(n) := \frac{1}{n}$.

Beispiel 39:

- Folge der Quadratzahlen: $1, 4, 9, 16, \ldots$ bzw. $q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $q(n) := n^2$.
- Folge der Stammbrüche: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ bzw. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $s(n) := \frac{1}{n}$.
- arithmetische Folge: $a_n = a_0 + nd$, z. B. $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$

Beispiel 39:

- Folge der Quadratzahlen: $1, 4, 9, 16, \ldots$ bzw. $q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $q(n) := n^2$.
- Folge der Stammbrüche: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ bzw. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $s(n) := \frac{1}{n}$.
- arithmetische Folge: $a_n = a_0 + nd$, z. B. $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$
- geometrische Folge: $a_n = a_0 \cdot d^n$, z. B. $2, 4, 8, 16, \ldots$

Beispiel 39:

- Folge der Quadratzahlen: $1, 4, 9, 16, \ldots$ bzw. $q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $q(n) := n^2$.
- Folge der Stammbrüche: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ bzw. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $s(n) := \frac{1}{n}$.
- arithmetische Folge: $a_n = a_0 + nd$, z. B. $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$
- geometrische Folge: $a_n = a_0 \cdot d^n$, z. B. $2, 4, 8, 16, \ldots$
- konstante Folge: $a_n = c$, $c \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl.

Beispiel 39:

- Folge der Quadratzahlen: $1, 4, 9, 16, \ldots$ bzw. $q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $q(n) := n^2$.
- Folge der Stammbrüche: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ bzw. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $s(n) := \frac{1}{n}$.
- arithmetische Folge: $a_n = a_0 + nd$, z. B. $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$
- geometrische Folge: $a_n = a_0 \cdot d^n$, z. B. $2, 4, 8, 16, \ldots$
- konstante Folge: $a_n = c$, $c \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl.
- Folge $3, 5, 7, \ldots$: Hm, ist das jetzt die Folge der ungeraden Primzahlen oder die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen?

Wie das Bildungsgesetz einer Zahlenfolge aussieht, ist anhand ein paar aufgeschriebener Anfangswerte nicht immer leicht zu erkennen und oft unklar. Außerdem kann man bei $m+1$ vielen gegebenen Anfangwerten eine Polynomfunktion m-ten Grades durch die Punkte (n, a_n) legen und behaupten, das sei das Bildungsgesetz (es ist jedenfalls *ein* mögliches Bildungsgesetz).

Wie das Bildungsgesetz einer Zahlenfolge aussieht, ist anhand ein paar aufgeschriebener Anfangswerte nicht immer leicht zu erkennen und oft unklar. Außerdem kann man bei $m + 1$ vielen gegebenen Anfangwerten eine Polynomfunktion m-ten Grades durch die Punkte (n, a_n) legen und behaupten, das sei das Bildungsgesetz (es ist jedenfalls *ein* mögliches Bildungsgesetz).

Damit man daraus keinen Intelligenztest für andere macht, schreibt man das Bildungsgesetz in Form der Abbildungsvorschrift dazu. Überall, wo sonst Pünktchen zur Beschreibung von Folgen eingesetzt werden, kann man dann eine ganz exakte, unmissverständliche Definition vornehmen. Die Verwendung von Pünktchen ist eben nicht streng mathematisch exakt, sondern dient nur zur Veranschaulichung, bei der die ersten Folgenglieder aufgezählt werden. Wenn klar ist, was gemeint ist, ist es aber ok, die Pünktchen zu verwenden.

Beispiel 40: Auf Seite 17 hatten wir die Folge $2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \ldots$ der natürlichen Zahlen n, für die es einen Körper mit n Elementen gibt. Das ist einfach die Zahlenfolge der Primpotenzen $\{p^k;\ p \text{ prim}, k \in \mathbb{N}\}$, der Größe nach aufgeschrieben.

Eine wichtige Möglichkeit, wie man Zahlenfolgen definieren kann, ist die über eine Rekursion (und geht auf das 5. Peano-Axiom zurück). Bei dieser wird auf vorige, schon definierte Folgenwerte a_n zurückgegriffen. Das wird in folgenden Beispielen, wo wir einige Zahlenfolgen rekursiv definieren, deutlich. Und durch Angabe eines Anfangswerts (ev. auch mehrerer) stellt man sicher, dass diese rekursive Definition auch irgendwo startet.

Eine wichtige Möglichkeit, wie man Zahlenfolgen definieren kann, ist die über eine Rekursion (und geht auf das 5. Peano-Axiom zurück). Bei dieser wird auf vorige, schon definierte Folgenwerte a_n zurückgegriffen. Das wird in folgenden Beispielen, wo wir einige Zahlenfolgen rekursiv definieren, deutlich. Und durch Angabe eines Anfangswerts (ev. auch mehrerer) stellt man sicher, dass diese rekursive Definition auch irgendwo startet.

Definition 28: Die Fakultät ist eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(1) := 1$ und $f(n+1) := (n+1) \cdot f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $n! := f(n)$ für diese Folge.

Eine wichtige Möglichkeit, wie man Zahlenfolgen definieren kann, ist die über eine Rekursion (und geht auf das 5. Peano-Axiom zurück). Bei dieser wird auf vorige, schon definierte Folgenwerte a_n zurückgegriffen. Das wird in folgenden Beispielen, wo wir einige Zahlenfolgen rekursiv definieren, deutlich. Und durch Angabe eines Anfangswerts (ev. auch mehrerer) stellt man sicher, dass diese rekursive Definition auch irgendwo startet.

Definition 28: Die Fakultät ist eine Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(1) := 1$ und $f(n+1) := (n+1) \cdot f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $n! := f(n)$ für diese Folge.

Die ersten Werte der Fakultätsfunktion sind
$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120 \ldots$

Die schon bekannte Potenzfunktion $a^n := a \cdots a$ (n mal), kann man auch rekursiv definieren:

Definition 29: $a^1 := a$, und $a^{n+1} := a \cdot a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die schon bekannte Potenzfunktion $a^n := a \cdots a$ (n mal), kann man auch rekursiv definieren:
Definition 29: $a^1 := a$, und $a^{n+1} := a \cdot a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wenn man möchte, geht auch folgende rekursive Definition für Durchschnitt, Vereinigung, Kreuzprodukt endlich vieler Mengen ($A_1, A_2, \ldots$ seien Mengen):

Definition 30:

- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i := \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Die schon bekannte Potenzfunktion $a^n := a \cdots a$ (n mal), kann man auch rekursiv definieren:
Definition 29: $a^1 := a$, und $a^{n+1} := a \cdot a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wenn man möchte, geht auch folgende rekursive Definition für Durchschnitt, Vereinigung, Kreuzprodukt endlich vieler Mengen ($A_1, A_2, \ldots$ seien Mengen):

Definition 30:

- $\bigcup\limits_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} A_i := \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\bigcap\limits_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} A_i := \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Die schon bekannte Potenzfunktion $a^n := a \cdots a$ (n mal), kann man auch rekursiv definieren:
Definition 29: $a^1 := a$, und $a^{n+1} := a \cdot a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wenn man möchte, geht auch folgende rekursive Definition für Durchschnitt, Vereinigung, Kreuzprodukt endlich vieler Mengen ($A_1, A_2, \ldots$ seien Mengen):

Definition 30:

- $\bigcup_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i := \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\bigcap_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i := \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\times_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\times_{i=1}^{n+1} A_i := \left(\times_{i=1}^{n} A_i\right) \times A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Die schon bekannte Potenzfunktion $a^n := a \cdots a$ (n mal), kann man auch rekursiv definieren:
Definition 29: $a^1 := a$, und $a^{n+1} := a \cdot a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wenn man möchte, geht auch folgende rekursive Definition für Durchschnitt, Vereinigung, Kreuzprodukt endlich vieler Mengen ($A_1, A_2, \ldots$ seien Mengen):

Definition 30:

- $\bigcup_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i := \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\bigcap_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i := \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\bigtimes_{i=1}^{1} A_i := A_1$, und $\bigtimes_{i=1}^{n+1} A_i := \left(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i\right) \times A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Und nach demselben Schema definiert man nun auch das Summen- und Produktzeichen:

Definition 31: Sei eine Folge a gegeben. Dann heißt die über

$$\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1, \; \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) + a_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge die Summenfolge von a.

Definition 31: Sei eine Folge a gegeben. Dann heißt die über

$$\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1, \ \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) + a_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge die Summenfolge von a.

Definition 32: Sei eine Folge a gegeben. Dann heißt die über

$$\prod_{i=1}^{1} a_i := a_1, \ \prod_{i=1}^{n+1} a_i := \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big) \cdot a_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge die Produktfolge von a.

Definition 31: Sei eine Folge a gegeben. Dann heißt die über

$$\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1, \ \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) + a_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge die Summenfolge von a.

Definition 32: Sei eine Folge a gegeben. Dann heißt die über

$$\prod_{i=1}^{1} a_i := a_1, \ \prod_{i=1}^{n+1} a_i := \Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big) \cdot a_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge die Produktfolge von a.

Das Zeichen $\sum$ heißt auch Summenzeichen, das Zeichen $\prod$ das Produktzeichen. Die natürliche Zahl i, die darin vorkommt, ist eine lediglich eine Hilfszahl für die Definition und heißt Index. Man nimmt auch andere Buchstaben außer i dafür, typischerweise n oder auch k.

Die Summenfolge ist also eine Folge s mit $s_1 := a_1$ und $s_{n+1} := s_n + a_{n+1}$, in unserer Pünktchenschreibweise hat man also $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, dieses n-te Folgenglied von s ist einfach die Summe der ersten n Folgenglieder $a_1, \ldots, a_n$ von a. Und ohne Pünktchen schreiben wir jetzt also $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$; für die Verwendung von Pünktchen gilt auch hier das oben Erwähnte.

Die Summenfolge ist also eine Folge s mit $s_1 := a_1$ und $s_{n+1} := s_n + a_{n+1}$, in unserer Pünktchenschreibweise hat man also $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, dieses n-te Folgenglied von s ist einfach die Summe der ersten n Folgenglieder $a_1, \ldots, a_n$ von a. Und ohne Pünktchen schreiben wir jetzt also $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$; für die Verwendung von Pünktchen gilt auch hier das oben Erwähnte.

Das Summenzeichen wird sehr häufig verwendet. Eine Summenfolge nennt man auch eine Reihe, und ihre Folgenglieder Partialsummen. In dieser Sprechweise ist eine Reihe also eine Folge von Partialsummen.

In unserem Beispiel Nr. 28 zur vollständigen Induktion hatten wir auf der linken Seite der Behauptung die Summe

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1),$$

die dortige Formel kann man jetzt auch schreiben als

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$

In unserem Beispiel Nr. 28 zur vollständigen Induktion hatten wir auf der linken Seite der Behauptung die Summe

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1),$$

die dortige Formel kann man jetzt auch schreiben als

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$

Derartige Formeln gibt es zuhauf, man kann sie auch meistens nach dem Muster wie in Beispiel Nr. 28 mit vollständiger Induktion beweisen.

In unserem Beispiel Nr. 28 zur vollständigen Induktion hatten wir auf der linken Seite der Behauptung die Summe

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1),$$

die dortige Formel kann man jetzt auch schreiben als

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2.$$

Derartige Formeln gibt es zuhauf, man kann sie auch meistens nach dem Muster wie in Beispiel Nr. 28 mit vollständiger Induktion beweisen.

Beispielsweise ist es jetzt ganz leicht, mit vollständiger Induktion die Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$ zu verallgemeinern zur Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \Big| \sum_{i=1}^{n} a_i \Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Und die Behauptung der früheren Übungsaufgabe zur Induktion lässt sich jetzt notieren als

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

sofern $x \neq 1$ gilt; die Formel gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und heißt geometrische Summenformel.

Und die Behauptung der früheren Übungsaufgabe zur Induktion lässt sich jetzt notieren als

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

sofern $x \neq 1$ gilt; die Formel gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und heißt geometrische Summenformel.

Man kann auch Summenschreibweisen benutzen, in der Bedingungen an den Index gestellt werden, wie z. B. in

$$\sum_{n,\ n^2 \leq 9} a_n = a_1 + a_2 + a_3, \quad \sum_{n,\ n|10} a_n = a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} \text{ usw.}$$

Das ist auch oft sehr nützlich.

Noch eine letzte Definition in diesem Zusammenhang: Man kann rekursive Definitionen sogar wie folgt "in zwei Richtungen" machen: Man definiert etwa das in der Kombinatorik übliche Symbol $\binom{n}{k}$ wie folgt:

Noch eine letzte Definition in diesem Zusammenhang: Man kann rekursive Definitionen sogar wie folgt "in zwei Richtungen" machen: Man definiert etwa das in der Kombinatorik übliche Symbol $\binom{n}{k}$ wie folgt:

Definition 33: Es sei $\binom{n}{0} := 1$, $\binom{0}{k} := 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$, sowie

$$\binom{n+1}{k+1} := \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$. Man nennt die Zahl $\binom{n}{k}$ Binomialkoeffizient.

Der Name "Binomialkoeffizient" kommt daher, dass diese Zahlen in der allgemeinen binomischen Formel als Koeffizienten (d. h. Vorzahlen) vorkommen:

Satz

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Der Name "Binomialkoeffizient" kommt daher, dass diese Zahlen in der allgemeinen binomischen Formel als Koeffizienten (d. h. Vorzahlen) vorkommen:

Satz

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Beweis? Geht jetzt mit vollständiger Induktion. (Versuchen Sie es selbst. . .)

Der Name "Binomialkoeffizient" kommt daher, dass diese Zahlen in der allgemeinen binomischen Formel als Koeffizienten (d. h. Vorzahlen) vorkommen:

Satz

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Beweis? Geht jetzt mit vollständiger Induktion. (Versuchen Sie es selbst. . .)

Und die Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

die Sie vermutlich aus der Schule kennen, lässt sich wegen obiger rekursiver Definition jetzt elegant mit vollständiger Induktion beweisen. (Das können Sie auch mal versuchen.)

Abbildungen, Funktionen, Folgen, Summen und Grenzwerte

- Abbildungen und Funktionen
- Folgen und Summen
- Grenzwerte von Folgen, Summen und Funktionswerten

Wir studieren jetzt Folgen und Summen (die spezielle Folgen sind) nun daraufhin, ob und wann man ihnen einen Grenzwert zuordnen kann.

Definition 34: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (bzw. heißt konvergent), wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - c| < \varepsilon$$

Wir studieren jetzt Folgen und Summen (die spezielle Folgen sind) nun daraufhin, ob und wann man ihnen einen Grenzwert zuordnen kann.

Definition 34: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (bzw. heißt konvergent), wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \; |a_n - c| < \varepsilon$$

Die Zahl c heißt dann Grenzwert der Folge. Ist eine Folge nicht konvergent, heißt sie divergent bzw. man sagt, sie divergiert.

Wir studieren jetzt Folgen und Summen (die spezielle Folgen sind) nun daraufhin, ob und wann man ihnen einen Grenzwert zuordnen kann.

Definition 34: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (bzw. heißt konvergent), wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \; |a_n - c| < \varepsilon$$

Die Zahl c heißt dann Grenzwert der Folge. Ist eine Folge nicht konvergent, heißt sie divergent bzw. man sagt, sie divergiert. Falls $c = 0$ Grenzwert ist, heißt die Folge eine Nullfolge.

Mit anderen Worten: Konvergenz gegen c liegt vor, wenn es zu jeder (beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle darauffolgenden Folgenglieder a_n mit $n \geq n_0$ nahe a liegen, genauer gesagt, ihr Abstand zu c ist kleiner als die vorgegebene positive Zahl ε. Hiermit ist ganz genau ausgedrückt, was "beliebig nahe kommen" bedeutet, indem wir den Abstand der Folgenglieder a_n zu c mit $|a_n - c|$ quantifiziert haben und fordern, dass dieser für alle genügend großen Indizes n unterhalb der vorgegebenen Schrankenzahl $\varepsilon > 0$ bleibt. Und je kleiner $\varepsilon > 0$ ist, umso kleinere Abstände fordern Sie; dann muss man eben größere Indizes nehmen.

Mit anderen Worten: Konvergenz gegen c liegt vor, wenn es zu jeder (beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle darauffolgenden Folgenglieder a_n mit $n \geq n_0$ nahe a liegen, genauer gesagt, ihr Abstand zu c ist kleiner als die vorgegebene positive Zahl ε. Hiermit ist ganz genau ausgedrückt, was "beliebig nahe kommen" bedeutet, indem wir den Abstand der Folgenglieder a_n zu c mit $|a_n - c|$ quantifiziert haben und fordern, dass dieser für alle genügend großen Indizes n unterhalb der vorgegebenen Schrankenzahl $\varepsilon > 0$ bleibt. Und je kleiner $\varepsilon > 0$ ist, umso kleinere Abstände fordern Sie; dann muss man eben größere Indizes nehmen. Der Begriff ist sehr wichtig, bilden Sie einmal die logische Verneinung und ihre sprachliche Umsetzung und überlegen sich deren Bedeutung, am besten auch in Beispielen. Am Anfang ist folgendes Beispiel ganz gut, mal sehr ausführlich aufgeschrieben:

Beispiel 41: Die Folge der Stammbrüche, $a_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, ist konvergent, und ihr Grenzwert ist gleich 0.

Beweis: Wir zeigen das Kriterium der Definition, nämlich: Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, gibt es dazu ein passendes n_0, mit der Eigenschaft, dass $|a_n - 0| < \varepsilon$ gilt für alle $n \geq n_0$. Die zu erfüllende Ungleichung ist: $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$, und äquivalent zu: $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Kann dies ab einem n_0 gelten? Ja, für die n, die größer oder gleich n_0 sind, und n_0 definieren wir dabei als die kleinste natürliche Zahl, die gerade noch größer als die reelle Zahl $\frac{1}{\varepsilon}$ ist. Es gibt also eine Zahl n_0 derart, dass sie die gewünschte Eigenschaft erfüllt. Damit ist das Kriterium mit dem Grenzwert $c = 0$ bewiesen. $\square$

Das war jetzt schon *sehr* ausführlich. Aufschreiben würde man diesen Beweis eher so:

Beispiel 42: **Beweis:** Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und dazu sei n_0 definiert als die kleinste natürliche Zahl, die größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ ist. Dann gilt für alle $n \geq n_0$, dass $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist, also folgt $\varepsilon > \frac{1}{n}$, also $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. $\square$

Aus der Definition der Konvergenz folgt, dass Grenzwerte (das sind ja in erster Linie reelle Zahlen) eindeutig bestimmt sind, falls Konvergenz vorliegt. Man schreibt für diesen Grenzwert c dann auch das Symbol

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

und schreibt die Aussage, dass a_n gegen c konvergiert, auch als

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} c.$$

Aus der Definition der Konvergenz folgt, dass Grenzwerte (das sind ja in erster Linie reelle Zahlen) eindeutig bestimmt sind, falls Konvergenz vorliegt. Man schreibt für diesen Grenzwert c dann auch das Symbol

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

und schreibt die Aussage, dass a_n gegen c konvergiert, auch als

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} c.$$

Die Schreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ bezeichnet dieselbe Aussage, nämlich zweierlei: die Folge konvergiert und ihr Grenzwert ist c.

Wir geben noch ein paar Beispiele, beweisen würde man die Konvergenz wie im vorigen Beispiel.

Beispiel 43: (Beispiele für Konvergenz)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Wir geben noch ein paar Beispiele, beweisen würde man die Konvergenz wie im vorigen Beispiel.

Beispiel 43: (Beispiele für Konvergenz)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Beispiel 44: Beispielfolgen, die divergieren: $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(1+n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$

Vielleicht überraschend ist, dass $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert (Beweis später). Diese Zahlenfolge heißt <u>harmonische</u> <u>Reihe</u>.

Und auch mit Grenzwerten kann man rechnen, hier ein paar Rechenregeln: ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b)

Und auch mit Grenzwerten kann man rechnen, hier ein paar Rechenregeln: ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b)

1	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
2	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = a \cdot b$
3	$a \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$
4	$\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = \lvert a\rvert$
5	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, falls alle $a_n \geq 0$

Mit diesen Regeln erhält man dann schon einfache Methoden zur Bestimmung von Grenzwerten, wie etwa in folgendem Beispiel:
Beispiel 45: Sei a die Folge $a_n := \frac{1+3n-2/n}{4n^2-2}$. Dann ist

$$a_n = \frac{1/n^2 + 3/n - 2/n^3}{4 - 2/n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{4-0} = 0.$$

Die Konvergenz einer Reihe ist nun nichts weiter als die Konvergenz der Summenfolge. In diesem Fall schreibt man für den Grenzwert der Reihe dann auch das Symbol

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \text{ wie z. B. in } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Die Konvergenz einer Reihe ist nun nichts weiter als die Konvergenz der Summenfolge. In diesem Fall schreibt man für den Grenzwert der Reihe dann auch das Symbol

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \text{ wie z. B. in } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Vorsicht, Verwechsungsgefahr: Mit diesem Symbol ist manchmal nicht der Grenzwert gemeint, sondern das Symbol wird auch als Name für die Summenfolge benutzt, wie z. B. in "die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert" – also offenbar auch dann, wenn keine Konvergenz vorliegt.

Und jetzt können wir auch endlich zeigen, dass $0.9999\dots = 1$ gilt: Es ist

$$0.9999\dots = \sum_{i=1}^{\infty}(9 \cdot 10^{-i}) = 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i, \text{ falls konvergent.}$$

Der Grenzwert existiert tatsächlich, denn nach unserer früheren geometrischen Summenformel, die Sie mit vollständiger Induktion gezeigt haben, ist

$$1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1-(1/10)^{n+1}}{1-1/10} = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{10}{9},$$

also

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{9},$$

was oben eingesetzt zeigt, dass 1 herauskommt für $0.999999\dots$

Ebenso zeigt man:

Satz

(geometrische Reihe)

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1: \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

Definition 35: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \geq a_n$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).

Definition 35: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \geq a_n$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).

Satz

Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent.

Diesen Satz nutzen wir jetzt in einem Beispiel:

Beispiel 46: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. (Beschränkt ist sie wegen $1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 3$.) Ihren Grenzwert

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,718\ldots$$

definieren wir als die <u>Eulersche</u> <u>Zahl</u> e. Man kann zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.