

§6 Die Exponentialfunktion, komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen

§6.1 exp und ln

Definition 36: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist durch den Grenzwert

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

eine Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, sie heißt Exponentialfunktion.

Es folgt sofort, dass $e = \exp(1)$ und $\exp(0) = 1$. Eine fundamentale Eigenschaft ist ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y),$$

so dass (nach etwas Beweisarbeit) folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Q} : \exp(xy) = \exp(x)^y.$$

Also ist $\exp(y) = e^y$ für alle $y \in \mathbb{Q}$.

Damit bekommen wir unsere alte Frage in den Griff, wie man mit irrationalen Hochzahlen arbeitet. Die folgende Definition ist nun sinnvoll:

Definition 37: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ definieren wir $e^x := \exp(x)$.

Einige Rechenregeln lassen sich dann wie folgt zusammenfassen ($x, y \in \mathbb{R}$):

1	$e^{x+y} = e^x e^y$
2	$(e^x)^y = e^{xy}$
3	$x \leq y \Rightarrow e^x \leq e^y$
4	$\forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Als Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist die Exponentialfunktion wegen Regel 3 eine bijektive Funktion, man kann dann die zugehörige Umkehrabbildung definieren:

Definition 38: Die Funktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als Umkehrabbildung von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, d. h. über die Eigenschaft

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ln(\exp(x)) = x \quad \text{bzw.} \quad \forall y \in \mathbb{R}_{>0} : \exp(\ln(y)) = y.$$

Sie heißt der natürliche Logarithmus.

Die definierende Eigenschaft von \ln lässt sich auch schreiben als die Aussage

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x)$$

Für beliebige Basen $a > 0$ können wir jetzt die Potenz mit beliebigen reellen Hochzahlen über die Exponential- und Logarithmusfunktion berechnen:

Satz 9. Für $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $a^x = e^{x \ln a}$.

Beweis: Nach Regel 2 und der Definition von \ln gilt: $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$. \square

Die bisherigen Potenzgesetze gelten jetzt uneingeschränkt für alle positiven Basen a . Wir fassen noch einige weitere Rechenregeln zusammen, die beim Rechnen mit \exp , \ln und Potenzen nützlich sind, und die sich aus bisher notierten Regeln herleiten lassen.

1	$\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0} : \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2	$\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0} : \ln \frac{x}{y} = \ln(x) - \ln(y)$
3	$\forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_{>0} : \ln(a^x) = x \ln(a)$

Somit gelingt uns das Auflösen der Gleichung $a^x = c$ nach a : Es ist $a = c^{1/x}$, falls $x \neq 0$ und $c > 0$; und diese Potenz ist jetzt berechenbar als $a = e^{(\ln c)/x}$.

Außerdem können wir jetzt die Gleichung $a^x = c$ sogar nach x auflösen: Es ist $x = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}$, falls $a, c > 0, a \neq 1$.

Beweis: $a^x = c \Leftrightarrow \ln(a^x) = \ln(c) \Leftrightarrow x \ln(a) = \ln(c) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(c)}{\ln(a)}$. \square

Man nennt die Zahl x mit $a^x = c$ auch den Logarithmus von c zur Basis a und schreibt $\ln_a(c) = x$ oder auch $\log_a(c) = x$ dafür.

Beispiel 47: Als ein Rechenbeispiel zum Thema \exp und \ln demonstrieren wir noch das Auflösen der Gleichung $a^x = c \cdot b^x$ nach x (falls $a, b, c > 0$ und $a \neq b$):

$$\begin{aligned} a^x = c \cdot b^x &\Leftrightarrow \ln(a^x) = \ln(c \cdot b^x) \Leftrightarrow x \ln(a) = \ln(c) + \ln(b^x) \Leftrightarrow x \ln(a) = \ln(c) + x \ln(b) \\ &\Leftrightarrow x(\ln(a) - \ln(b)) = \ln(c) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(c)}{\ln(a) - \ln(b)} \end{aligned}$$

Zwei interessante Grenzwerte mit \exp und \ln sind ($k \in \mathbb{N}$ beliebig):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\exp(n)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^{1/k}} = 0.$$

§6.2 Die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen

Man kann die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen einfach definieren als Menge \mathbb{R}^2 , versehen mit der richtigen Definition für "+" und ".".

Eine Verwechslung mit \mathbb{R}^2 als Menge möchte man aber möglichst vermeiden, daher schreibt man anstelle eines Zahlenpaares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dann einfach $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und

nennt dies eine komplexe Zahl mit Realteil x und Imaginärteil y . Im Koordinatensystem der Ebene lassen sich die komplexen Zahlen dann als Punkte darstellen. Die x -Achse nennt man dann auch die reelle Achse, die y -Achse die imaginäre Achse.

Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C} := \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ bezeichnet. Für zwei komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ gilt: $z = w \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$.

Die Summe bzw. Differenz zweier komplexer Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ wird jetzt komponentenweise definiert, d. h.

$$z \pm w := (x \pm u) + i(y \pm v).$$

Die Multiplikation hingegen muss anders gemacht werden, die Definition hierfür lautet

$$zw := (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Daraus folgt, dass

$$i^2 = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$$

ist, das alte Problem mit der Lösbarkeit von $x^2 = -1$ ist damit erledigt: Ja, die Gleichung hat in \mathbb{C} die Lösung $x = i$ (und auch $x = -i$). Daher können wir dem Symbol $\sqrt{-1}$ einen Sinn geben und $\sqrt{-1} := i$ schreiben.

Zunächst muss gesagt werden, dass \mathbb{C} mit den so definierten Verknüpfungen "+" und "." einen Körper bildet, der \mathbb{R} enthält, nämlich in Form der speziellen komplexen Zahlen $x + i \cdot 0$. Die Körperaxiome muss man also alle nachrechnen.

Die dafür nötige Division als Umkehrung der Multiplikation erhält man über

$$\frac{z}{w} = \frac{x + iy}{u + iv} := \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}.$$

Noch zwei Begriffe:

Definition 39: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die zu z konjugiert komplexe Zahl ist $\bar{z} := x - iy$. Der Betrag $|z|$ von z ist die nichtnegative reelle Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Die Lösung von Gleichungen mit Potenzen in x kann in \mathbb{C} jetzt beliebig ausgeführt werden, es gilt nämlich der folgende Satz von Gauß, der auch Fundamentalsatz der Algebra genannt wird:

Satz 10. (*Fundamentalsatz der Algebra*) Sei $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k$ ein nicht konstantes Polynom mit $n \in \mathbb{N}$ und komplexen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$. Dann hat das Polynom eine komplexe Nullstelle, d. h. es gibt eine Zahl $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $P(z) = 0$ löst.

Bewiesen wird dieser Satz oft in einer Vorlesung über Funktionentheorie.

Inwiefern vererben sich die anderen Eigenschaften von \mathbb{R} nach \mathbb{C} ? Nun, die Vollständigkeit in dem Sinne, dass Cauchyfolgen immer einen Grenzwert besitzen, vererbt sich nach

\mathbb{C} , denn Grenzwerte kann man in \mathbb{C} komponentenweise bilden, und als den (für den Grenzwertbegriff nötigen) Abstand zwischen zwei komplexen Zahlen z, w nehmen wir den Wert $|z - w|$.

Aber ein Opfer müssen wir bei dieser Erweiterung von \mathbb{R} hinnehmen: Die Ordnungsrelation \leq kann nicht auf \mathbb{C} fortgesetzt werden, d.h. \mathbb{C} ist nicht anordenbar und kann damit nicht auf einen einzigen Zahlenstrahl gebracht werden, wie das mit \mathbb{R} ging. Bei der Veranschaulichung von \mathbb{C} müssen wir stets mit der ganzen komplexen Ebene arbeiten, ein einziger "Anordnungsstrahl" reicht hier nicht aus. Daher ist ein Ausdruck wie $i < 2$ absolut sinnlos. Hingegen ist die Aussage $|i| < 2$ wahr, da der Betrag den Abstand einer komplexen Zahl zum Nullpunkt $0 = 0 + i \cdot 0$ misst und eine reelle Zahl ist.

Für das Rechnen in \mathbb{C} gelten die folgenden Rechenregeln ($w, z \in \mathbb{C}$):

1	$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2	$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3	$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, falls $w \neq 0$
4	$\overline{\overline{z}} = z$
5	$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
6	$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
7	$ z = \sqrt{z\overline{z}}$
8	$ zw = z \cdot w $
9	$\left \frac{z}{w}\right = \frac{ z }{ w }$ falls $w \neq 0$
10	$ z = \overline{z} $
11	$ z + w \leq z + w $

Die Exponentialfunktion kann durch ihre Reihendarstellung

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

zu einer Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

Die alte Formel $\forall z, w \in \mathbb{C} : \exp(z+w) = \exp(z) \exp(w)$ bleibt für komplexe Zahlen gültig. Aus dieser kann man nun herleiten, dass $\forall x \in \mathbb{R} : |\exp(ix)| = 1$, denn: $|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \exp(i\overline{x}) = \exp(ix) \exp(-ix) = \exp(0) = 1$.

Und es gelten die folgenden Rechenregeln, die Moivresche Formeln heißen ($x, y \in \mathbb{R}$):

1	$\exp(ix) \exp(iy) = \exp(i(x + y))$
2	$(\exp(ix))^n = \exp(inx)$, $n \in \mathbb{N}$
3	$\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix) = \frac{1}{\exp(ix)}$

Eine Warnung zum Rechnen mit komplexen Zahlen: Die Moivresche Formel Nr. 2 stimmt nur mit natürlichen Zahlen n , d. h. im allgemeinen ist $(\exp(ix))^r \neq \exp(ixr)$ für $r \notin \mathbb{N}$.

Denn würde man beispielsweise $\frac{1}{2}$ einsetzen für die Zahl r bzw. n und den Wert $x = 2\pi$ betrachten, so erhält man *l.S.* $= (\exp(2\pi i))^{1/2} = 1^{1/2} = 1$, aber *r.S.* $= \exp(i \cdot \pi) = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1$.

§6.3 Trigonometrische Funktionen

Nun können wir die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus wie folgt definieren:

Definition 40: Für $z \in \mathbb{C}$ ist durch $\cos(z) := \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$ die Cosinusfunktion $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, und durch $\sin(z) := \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$ die Sinusfunktion $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert¹⁹.

Es folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Eulersche Formel $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ und sofort, dass $\sin^2 x + \cos^2 x = |\exp(ix)|^2 = 1$.

Die beiden Funktionen $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind für reelle x reellwertig mit Werten in $[-1, 1]$ und periodisch mit derselben Periode. Die Hälfte der Periodenlänge kann man nun als die Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ definieren²⁰ und somit die Periodizität notieren in der Form

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Damit ist auch $\exp(2\pi i) = 1$, bzw. $\exp(x + 2\pi i) = \exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Weiter haben die Funktionen \sin und \cos genau die Nullstellen

$$\begin{aligned} \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi, \dots \\ \sin x = 0 &\Leftrightarrow x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \end{aligned}$$

Ist nun $z \in \mathbb{C}$, gibt es eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $\varphi \in (-\pi, \pi]$ so dass $z = |z|\exp(i\varphi)$ gilt. Diese Zahl heißt Argument von z und die Darstellung $z = |z|\exp(i\varphi)$ heißt die Darstellung von z in Polarkoordinaten.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen in Polarkoordinaten geht nun besonders leicht, da für $z = |z|\exp(i\varphi)$ und $w = |w|\exp(i\psi)$ gilt:

$$z \cdot w = |z||w|\exp(i(\varphi + \psi)), \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\exp(i(\varphi - \psi)), \text{ falls } w \neq 0.$$

Formeln für die trigonometrischen Funktionen \sin und \cos wie die Additionstheoreme

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

und zahlreiche weitere Identitäten, die man für diese Funktionen in Formelsammlungen findet, lassen sich nun leicht herleiten: Für die Additionstheoreme z. B. berechnet man

$$\cos(x + y) + i \sin(x + y) = \exp(i(x + y)) = \exp(ix) \exp(iy)$$

¹⁹Die Argumentklammern bei \sin und \cos werden oft weggelassen, wenn keine Unklarheit droht.

²⁰Oder beweisen, dass diese identisch mit der Kreiszahl π ist, die Sie kennen! Wie würden Sie π definieren?

$$\begin{aligned}
&= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\
&= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \sin y \cos x)
\end{aligned}$$

und vergleicht die Real- und Imaginärteile der linken und rechten Seite miteinander.

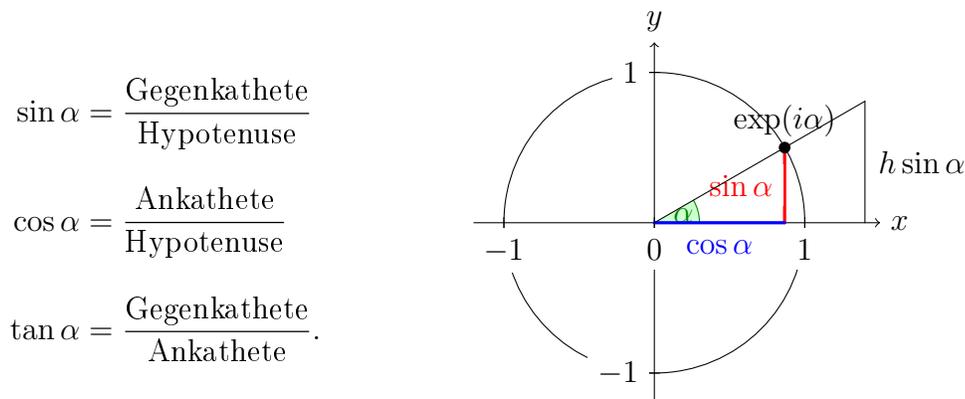
Die Funktion $\tan : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$, $\tan z := \sin z / \cos z$ mit $S := \{\pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi, \dots\}$ kommt auch oft vor und heißt Tangensfunktion.

Eine Tabelle mit den wichtigsten Sinus-/Kosinus-/Tangens-Werten:

Grad	Bogenmaß	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	-

Eine der wichtigsten Anwendungen der Trigonometrie sind die Dreiecksberechnungen. Diese kennen Sie bestimmt noch aus der Schule, hier eine kurze Wiederholung:

Im rechtwinkligen Dreieck gilt für jeden Innenwinkel α , der nicht der rechte Winkel ist:



Warum gelten diese Formeln? Nun, sie gelten im Einheitskreis, da $\exp(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$ für reelle α den Einheitskreis durchläuft wegen $|\exp(i\alpha)| = 1$, und dort die Formeln für das Dreieck mit der Hypotenusenlänge (gleich Radius) 1 gelten. Bei linearer Streckung des Kreises am Ursprung um einen beliebigen Faktor $h > 0$ erhalten wir ein Dreieck mit Hypotenusenlänge h , Gegenkathetenlänge $h \sin \alpha$ und Ankathetenlänge $h \cos \alpha$. Der Winkel bleibt gleich, also auch $\sin \alpha = \frac{h \sin \alpha}{h}$ usw. Im Bild mit dem Einheitskreis wird auch die Periodizität nach Durchlaufen des Vollkreises klar, man landet bei dem gleichen Wert $\exp(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Dass dies gerade beim Wert $2\pi = 2 \cdot 3.141592654\dots$ geschieht, kann man numerisch ausrechnen ²¹.

Dass 2π außerdem die Länge des Kreisumfangs ist, rechnet man meist in Analysis 2 mithilfe eines Kurvenintegrals nach, das die Länge einer Kurve (hier des Kreisbogens) misst.

²¹Dafür werden geeignete Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen eingesetzt.