VK8: Ausblick in die Lineare Algebra: Vektoren, Dimension, Matrizen

§1: Vektoren

Man beginnt mit den Vektorraumaxiomen zur Definition eines Vektorraums:

Vektorraumaxiome: Sei K ein Körper. Eine Menge V mit einer Verknüpfung $+$ heißt Vektorraum über K, falls gilt:

① $(V,+)$ ist abelsche Gruppe,

und es gilt für alle $v,w \in V$ und $\alpha,\beta \in K$:

② $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$

③ $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$

④ $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

⑤ $1 \cdot v = v$.

Körperaxiome: Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt Körper, falls gilt:

$\boxed{1}$ $(K,+)$ ist abelsche Gruppe,

$\boxed{2}$ $(K\setminus\{0\},\cdot)$ ist abelsche Gruppe,

$\boxed{3}$ $\forall a,b,c \in K: \ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

Gruppenaxiome: Eine Menge G mit einer Operation $\circ$ (d.h. einer Abbildung $\circ: G\times G \to G$, wir schreiben $a\circ b := \circ(a,b)$ für $a,b\in G$) heißt Gruppe, falls gilt:

⟨1⟩ $\forall a,b,c \in G: \ (a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$

⟨2⟩ $\exists 0 \in G \ \forall a \in G: \ 0\circ a = a \circ 0 = 0$

⟨3⟩ $\forall a\in G \ \exists b \in G: \ a\circ b = b\circ a = 0$

G heißt abelsch, falls $\forall a,b\in G: \ a\circ b = b\circ a$

Vektoren sind nun die Elemente eines Vektorraums.

Bsp.: $\mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}$-VR, $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}$-VR, $\mathbb{C}^n$ ist $\mathbb{C}$-VR,
$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ stetig} \}$ ist $\mathbb{R}$-VR.

§2: Lineare Abhängigkeit / Lineare Unabhängigkeit

Def.: Gegeben sei ein K-Vektorraum V und eine (Index-)Menge $I \neq \emptyset$.
Eine Familie von Vektoren aus V ist eine Abbildung $I \to V$, $i \mapsto v_i$. Wir schreiben diese (suggestiv) in der Form $(v_i)_{i \in I}$.

Bem.: Im Fall $I = \mathbb{N}$ handelt es sich um eine Folge von Vektoren $v_1, v_2, v_3, \ldots$ Aber auch I endl. oder $I = \mathbb{R}$ ist erlaubt, die Schreibweise ermöglicht eine Indizierung der Elemente mit $i \in I$.

Def.: Geg. seien endl. viele Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eines K-Vektorraums V.
Sie heißen linear unabhängig, falls die Gleichung $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ besitzt.

Spezialfall $n=1$: Jedes $v \neq 0$ ist linear unabh., der Vektor $v = 0$ ist lin. abh.

Def.: Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren eines VRs V heißt linear unabhängig, falls je endlich viele Vektoren der Familie linear unabhängig sind.

Bsp.: Die Vektoren $1, x, x^2, x^3, \ldots$ im Vektorraum V der reellen Polynome ist linear unabhängig.

[Hier ist $V := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ n \in \mathbb{N},\ \text{die } a_i \in \mathbb{R} \}$]

§3: Linearkombinationen, Basis

Geg. sei ein K-VR V.

Def.: Geg. seien Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$. Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ heißt $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$ eine Linearkombination der $v_1, \dots, v_n$.

Def.: Die Menge $L(v_1, \dots, v_n) := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n ;\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$ der Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_n \in V$ heißt Lineare Hülle / Lineares Erzeugnis / Span / aufgespannter Untervektorraum der Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$. Weiter ist $L(\emptyset) := \{0\}$.
Für $U \subseteq V$ setzt man $L(U) := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n ;\ \lambda_i \in K,\ v_i \in U\}$.

Bem.: Schreiben auch $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Def.: Sei V ein K-VR und $U \subseteq V$. Die Menge U heißt Erzeugendensystem von V, falls $L(U) = V$ ist.

Def.: Eine Basis eines VRs ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Def.: Die Dimension eines VRs ist die Anzahl der Elemente einer Basis.

Die Definition der Dimension ist sinnvoll, da alle Basen von V gleichviele Elemente haben.

Bsp.:
- $\mathbb{R}^n$ ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-VR, Standard-Basis: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ ist so schreibbar als $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- $\mathbb{C}^n$ ist ein $2n$-dimensionaler $\mathbb{R}$-VR.
- Der VR der reellen Polynome ist ∞-dimensional.

Satz: Jeder VR hat eine Basis. [Beweisbar mit Auswahlaxiom.]

§4: Lineare Abbildungen, Matrizen

Def.: Seien V, W zwei K-VRe.
Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt linear, wenn gilt:
(1) $\forall u, v \in V: f(u+v) = f(u) + f(v)$,
(2) $\forall v \in V \; \forall \lambda \in K: f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v)$.

Bem.: Eine lineare Abb. nennt man auch Homomorphismus (von VRen).

Spezielle lineare Abb. sind die Matrizenmultiplikationen:

Def.: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper.
Eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ über K ist ein rechteckiges Zahlenschema der Form
aus m Zeilen
und n Spalten,
deren Einträge $a_{ij} \in K$ sind.
Zeile i Spalte j

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Menge der $m \times n$-Matrizen über K wird mit $K^{m \times n} = \{(a_{ij});\; a_{ij} \in K\}$ bezeichnet.

Bem: Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ bestimmt eine lineare Abbildung
$$f: K^n \to K^m, \quad f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) = A \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ji} \cdot e_j,$$
wo $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des K^n ist.
Für das Bild von $x \in K^n$ schreiben wir also $A \cdot x$, es gilt:

$$f\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n \\ \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Def.: Die lineare Abb. $f(x) := A \cdot x$ heißt Matrixmultiplikation (mit A).

<u>Bsp.:</u> $m=n=2$, $K=\mathbb{R}$:

Die Abbildung $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}2x-y\\x\end{pmatrix}$
ist eine Matrixmultiplikation.
Weiter sind $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ die Spalten der Matrix A.

<u>Bem.:</u> • Generell gilt: "Die Spalten einer Matrix sind die Bilder der Standardbasisvektoren."

• Jede lineare Abbildung $f:V\to W$ zwischen K-VRen kann als eine Matrixmultiplikation aufgefasst werden: Wird in $V=K^n$, $W=K^m$ die Standardbasis zugrundegelegt, so ergeben sich die Spalten der Matrix als die Bilder der Standardbasisvektoren.

• Eine Gleichung der Form $A\cdot x=b$ heißt <u>Lineares Gleichungssystem</u>. Dabei sind $A\in K^{m\times n}$, $b\in K^m$ geg., $x\in K^n$ gesucht. Für $b=0$ ist die Lösungsmenge ein Untervektorraum des K^n.

<u>Spezielle Lineare Abbildungen in der Ebene</u> ($\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$):

Spiegelung an		Drehung um		Projektion auf	
x-Achse	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	α	$\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$	x-Achse	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$
y-Achse	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$	y-Achse	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
Gerade $bx+ay=0$	$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2-b^2&2ab\\2ab&b^2-a^2\end{pmatrix}$	60°	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$	Gerade $bx+ay=0$	$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2&ab\\ab&b^2\end{pmatrix}$
Gerade $y=mx$	$\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2&2m\\2m&m^2-1\end{pmatrix}$	90°	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	Gerade $y=mx$	$\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1&m\\m&m^2\end{pmatrix}$