Vorkurs Mathematik, PD Dr. K. Halupczok,
WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik 4.9.2014

Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 2, Besprechung am 9.9.2014

Aufgabe 1: Deutsch → Formel, Formel → Deutsch

Gegeben seien folgende deutsche Sätze:

1. "Person x, die keinen anderweitigen Anspruch auf Absicherung im Krankheitsfall hat und zuletzt gesetzlich krankenversichert war, ist versicherungspflichtig."
2. "Wenn man nachts ohne Licht fährt, sieht man nichts; es sei denn, es ist Vollmond."

Schreiben Sie die Sätze jeweils formal als Implikation auf (kürzen Sie Teile davon ab als A, B, C usw.), und bilden Sie die formale Verneinung bzw. Kontraposition. Wie formuliert man die Verneinung bzw. Kontraposition wieder als deutschen Satz?

Beispiel 1: Der Satz "Wenn es regnet oder der Gulli überläuft, wird die Straße nass." ist formalisierbar als $(A \vee B) \Rightarrow C$. Die Verneinung ist $\neg((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B)) \wedge \neg C \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg C$ und bedeutet "Es regnet oder der Gulli läuft über, und die Straße bleibt trocken." Die Kontraposition ist $(\neg C \Rightarrow \neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))$ und bedeutet "Wenn die Straße trocken bleibt, dann regnet es nicht, und auch der Gulli läuft nicht über."

Lösung:

Zu 1.: Die Aussage ist formulierbar als $\neg A \wedge B \Rightarrow C$, wobei wie folgt abgekürzt wurde:
$A =$ "Person x hat einen anderweitigen Anspruch auf Absicherung im Krankheitsfall", $B =$"Person x war zuletzt gesetzlich krankenversichert", $C =$ "Person x ist versicherungspflichtig"
Die Kontraposition $\neg C \Rightarrow A \vee \neg B$ bedeutet: "Ist Person x nicht versicherungspflichtig, so hat sie einen anderweitigen Anspruch auf Absicherung im Krankheitsfall oder war zuletzt nicht gesetzlich krankenversichert."
Die Verneinung $\neg A \wedge B \wedge \neg C$ bedeutet "Person x hat keinen anderweitigen Anspruch auf Absicherung im Krankheitsfall, ist zuletzt nicht gesetzlich krankenversichert und ist nicht versicherungspflichtig."

Zu 2.: $B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow C)$
$A =$ "Man fährt nachts ohne Licht." $B =$ "Es ist Vollmond." $C =$ "Man sieht nichts."
Umformulierung: Wenn Vollmond ist, dann ist unwahr, dass man nichts sieht sobald man nachts ohne Licht fährt.
Kontraposition: $(A \Rightarrow C) \Rightarrow \neg B$ bedeutet "Wenn es stimmt, dass man nichts sieht sobald man nachts ohne Licht fährt, dann ist kein Vollmond."
Verneinung: $B \wedge (A \Rightarrow C)$ Es ist Vollmond und man sieht nichts sobald man ohne Licht fährt.

Aufgabe 2: Rechnen mit Aussagenformeln.

Seien A und B Aussagen. Formulieren Sie die folgenden Aussagen um in dazu äquivalente Aussagen, die nur mit den Zeichen $\wedge, \vee$ und $\neg$ auskommen. Verwenden Sie dafür die Logikregeln aus der Vorlesung.

1. $\neg(\neg A \wedge (B \vee A) \Rightarrow A)$
2. $A \wedge \neg(A \Leftrightarrow \neg B)$
3. $(A \Rightarrow B) \wedge \neg(B \Rightarrow A)$

4. $A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A \vee B)$

Wie kann man diese Aussagen sprachlich ausdrücken?
Wie lauten die Verneinungen dieser Aussagen?

Lösung:

Bemerkung: Hier nur beispielhaft die sprachliche Formulierung der Kurzfassungen der Aussagen:
Zu 1. Es ist

$$\begin{aligned} & \neg(\neg A \wedge (B \vee A) \Rightarrow A) \\ \Leftrightarrow\ & (\neg A \wedge (B \vee A)) \wedge \neg A \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \wedge (B \vee A) \\ \Leftrightarrow\ & (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge A) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \wedge B. \end{aligned}$$

In Worten: "B und nicht A", Verneinung: $A \vee \neg B$, in Worten: "A oder nicht B"

Zu 2. Es ist

$$\begin{aligned} & A \wedge \neg(A \Leftrightarrow \neg B) \\ \Leftrightarrow\ & A \wedge \neg((A \Rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \Rightarrow A)) \\ \Leftrightarrow\ & A \wedge (\neg(A \Rightarrow \neg B) \vee \neg(\neg B \Rightarrow A)) \\ \Leftrightarrow\ & A \wedge ((A \wedge B) \vee (\neg B \wedge \neg A)) \\ \Leftrightarrow\ & (A \wedge A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg A) \\ \Leftrightarrow\ & A \wedge B. \end{aligned}$$

In Worten: "A und B", Verneinung: $\neg A \vee \neg B$, in Worten: "nicht A oder nicht B"

Zu 3. Es ist

$$\begin{aligned} & (A \Rightarrow B) \wedge \neg(B \Rightarrow A) \\ \Leftrightarrow\ & (\neg A \vee B) \wedge (B \wedge \neg A) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \wedge (B \wedge \neg A) \vee B \wedge (B \wedge \neg A) \\ \Leftrightarrow\ & (\neg A \wedge B) \vee (B \wedge \neg A) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \wedge B \end{aligned}$$

In Worten: "Es gilt B und nicht A", Verneinung: $A \vee \neg B$, in Worten: "Es gilt A oder nicht B".

Zu 4. Es ist

$$\begin{aligned} & A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A \vee B) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee (\neg B \vee (\neg A \vee B)) \\ \Leftrightarrow\ & \neg A \vee \neg B \vee \neg A \vee B \\ \Leftrightarrow\ & (\neg A) \vee (B \vee \neg B) \\ \Leftrightarrow\ & B \vee \neg B. \end{aligned}$$

"B gilt oder B gilt nicht" (ist immer wahr), Verneinung: $\neg B \wedge B$, in Worten: "B gilt nicht und gilt" (ist immer falsch).

Bemerkung: Es gibt mehrere mögliche Lösungen dieser Aufgaben. Ferner beachte man, dass die angegebenen Aussagenformeln in 1.–4. nicht unbedingt immer wahre Aussagen ergeben müssen, sondern nur die Äquivalenz der Aussageformeln in den Herleitungen, egal, welche Aussagen man für A und B einsetzt.

Aufgabe 3: Beispiele für Beweisverfahren.

Welches Beweisverfahren wird in den folgenden Beweisen benutzt?
(Bem.: Das Zeichen $a \mid b$ heißt "a teilt b")
Vergleichen Sie die Beweise miteinander: Einmal rein äußerlich, andererseits auch inhaltlich: Wo wird direkt, wo indirekt argumentiert? (Wenn Sie nicht alles inhaltlich verstehen, ist das nicht so schlimm. Sie sollen hier nur Beispiele sehen, wie man logische Argumentationen "mathematisch" richtig aufschreiben kann.)

Satz 1: Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.
Beweis: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, etwa n, $n+1$, $n+2$, ist $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3\cdot(n+1)$, also durch drei teilbar. $\square$

Lösung:

direkter Beweis

Satz 2: Vor.: a, b, c seien aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
Beh.: $3 \mid a+b+c$.
Bew.: Laut Vor. ist $b = a+1$ und $c = b+1 = (a+1)+1 = a+2$. Dann gilt: $a+b+c = a+(a+1)+(a+2) = 3a+3 = 3\cdot(a+1) \Rightarrow 3 \mid a+b+c$. $\square$

Lösung:

direkter Beweis, etwas formaler aufgeschrieben

Satz 3: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Beweis: Angenommen, es gäbe nur die endlich vielen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$. Dann ist die natürliche Zahl $n := p_1 \cdot p_2 \cdots p_r + 1$ durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ teilbar. Da aber jede natürliche Zahl > 1 durch eine Primzahl (etwa der kleinste Teiler von n, der > 1 ist, vgl. Satz 4) teilbar sein muss, existiert noch eine weitere Primzahl, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Lösung:

indirekter Beweis, die Annahme, die zum Widerspruch geführt wird, lautet "Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$."

Satz 4: Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist durch eine Primzahl teilbar.
Bew.: Sei p der kleinste Teiler > 1, der n teilt. Dann ist p prim, denn wäre p zusammengesetzt aus zwei Faktoren $a, b > 1$, so wäre $a > 1$ ein Teiler von n, der kleiner ist als p, im Widerspruch zur Wahl von p. Also ist p prim. $\square$

Lösung:

direkter Beweis, welcher einen indirekten (Unter-)Beweis enthält für die Zwischenbehauptung "$p \mid n$, $p > 1$, p minimal $\Rightarrow$ p Primzahl.", beginnt im Text bei "denn wäre..."

Satz 5: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.
Bew.: Ann.: $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_r\}$.
Betrachte $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots,\ p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt

$p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, Widerspruch. $\square$

Bem.: Die Behauptung in Satz 4 ist auch als $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, p \in \mathbb{P} : p \mid n$ schreibbar.

Lösung:

derselbe Beweis wie in Satz 3, etwas formaler aufgeschrieben

Satz 6: Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann ist $\mathbb{P}$ unendlich groß.

Bew.: Wir konstruieren eine unendlich große Menge von Primzahlen wie folgt: Sei p_1 eine Primzahl, etwa $p_1 := 2$. Sind Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ gegeben, betrachte man $n := p_1 \cdots p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \ldots,\ p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$, setze dann $p_{r+1} := p$. Auf diese Weise können unendlich viele Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ konstruiert werden. $\square$

Lösung:

direkter Beweis (durch Konstruktion)