Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 4, Besprechung am 16.9.2014

Aufgabe 1: Vollständige Induktion.

Zeigen Sie die folgenden Sätze mit vollständiger Induktion:

$$(a) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$(b) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Lösung:

Zu (a): Induktionsanfang: $n = 1$. Dann ist

$$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1},$$

also die Behauptung wahr für $n = 1$.

Induktionsschritt von n nach $n + 1$: Induktionsannahme: Sei die Behauptung wahr für eine natürliche Zahl n. Dann ist sie auch für $n + 1$ richtig, weil

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&\overset{\text{Ind.vor.}}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{2(n+2) - (n+1)}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{(n+1) + 2}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

□

Zu (b): Induktionsanfang: $n = 1$. Dann ist

$$1 \leq 2 - \frac{1}{1},$$

also die Behauptung wahr für $n = 1$.

Induktionsschritt von n nach $n + 1$: Induktionsannahme: Sei die Behauptung wahr für eine natürliche Zahl n. Dann ist sie auch für $n + 1$ richtig, weil

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2} \\
&= 2 - \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)^2}
\end{aligned}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n+1},$$

wobei im letzten Schritt die Ungleichung

$$\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \geq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n^2+n+1 \geq n(n+1) = n^2+n$$

verwendet wurde. □

Aufgabe 2: Noch mehr vollständige Induktion.

Zeigen Sie:

(1) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3n^2 > (n+1)^2$.

(2) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3^n > n^2$.

(3) Sei g eine (beliebige) der beiden Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 - x - 1$. Dann gilt $g^n = g^{n-1} + g^{n-2}$ für alle natürlichen Zahlen n, die größer als 1 sind (man beachte $g^0 = 1$).

Lösung:

Zu (1):

<u>$n = 2$:</u> $3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12 > 9 = 3^2 = (2+1)^2$.

<u>$n \to n+1$:</u> Ist die Beh. für n wahr, dann auch für $n+1$, weil

$$\begin{aligned} 3(n+1)^2 &= 3n^2 + 6n + 3 \overset{\text{Ind.Vor.}}{>} (n+1)^2 + 6n + 3 \\ &= (n+2-1)^2 + 6n + 3 = (n+2)^2 - 2(n+2) + 1 + 6n + 3 \\ &= (n+2)^2 + 4n > (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2. \end{aligned}$$

□

Zu (2):

<u>$n = 2$:</u> $3^2 = 9 > 4 = 2^2$.

<u>$n \to n+1$:</u> Ist die Beh. für n wahr, dann auch für $n+1$, weil

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{\text{Ind.Vor.}}{>} 3n^2 \overset{(1)}{>} (n+1)^2.$$

□

Zu (3): Zu zeigen ist der folgende Satz:

Vor.: Sei g eine Nullstelle des Polynoms $x^2 - x - 1$, d. h. g ist eine reelle Zahl mit $g^2 - g - 1 = 0$ bzw. $g^2 = g + 1$.

Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt $g^n = g^{n-1} + g^{n-2}$.

Beweis der Behauptung durch vollständige Induktion nach n:

<u>$n = 2$:</u> Es gilt $g^2 \overset{\text{Vor.}}{=} g + 1 = g^{2-1} + g^{2-2}$.

<u>$n \to n+1$:</u> Es gilt

$$g^{(n+1)-1} + g^{(n+1)-2} = g^n + g^{n-1} = g(g^{n-1} + g^{n-2}) \overset{\text{Ind.Vor.}}{=} g \cdot g^n = g^{n+1}.$$

□

Schneller geht hier ein direkter Beweis ohne Induktion: Es gilt für alle $n \geq 2$:

$$g^n = g^{n-2} \cdot g^2 = g^{n-2}(g+1) = g^{n-1} + g^{n-2}.$$

□

Fazit: Nicht immer ist die vollständige Induktion die beste Wahl bei Beweisen von Aussagen über natürliche Zahlen. Es ist auch nicht gesagt, dass die vollständige Induktion stets zum Ziel führt.

Z. B. für die Aufgabenteile (1) und (2) kann man sich auch auf anderem Wege direkte Beweise überlegen.

Aufgabe 3: Logik der Definition eines teilerfremden Zahlenpaares.

Im Skript wurde durch die Aussage

$$\forall\, c \in \mathbb{N}: \; c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c = 1$$

definiert, dass zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ *teilerfremd* sind. Wie kann man diese Aussage rein sprachlich ausdrücken? Schreiben Sie die formale Verneinung der Aussage auf und drücken Sie diese ebenfalls sprachlich aus.

Denken Sie daran, dass "$c \mid a$" und "$c \mid b$" ebenfalls Abkürzungen für Aussagen sind; diese enthalten einen Existenzquantor. Wenn man diese Aussagen dann in die Definition einsetzt, wie lautet dann die formale Verneinung und ihre sprachliche Umsetzung?

Lösung:

Die Aussage "$\forall\, c \in \mathbb{N} : (c \mid a \wedge c \mid b) \Rightarrow c = 1$" bedeutet: "Jede natürliche Zahl c, die a und b teilt, ist (notwendigerweise) gleich 1."

Gleichwertig/äquivalent: "$\forall\, c \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \neg(c \mid a) \vee \neg(c \mid b)$, in Worten: "Jede natürliche Zahl $c \neq 1$ teilt a nicht oder b nicht."

Formale Verneinung:

$$\begin{aligned} &\exists\, c \in \mathbb{N} : \neg((c \mid a \wedge c \mid b) \Rightarrow c = 1) \\ \Leftrightarrow\; &\exists\, c \in \mathbb{N} : (c \mid a \wedge c \mid b) \wedge c \neq 1 \\ \Leftrightarrow\; &\exists\, c \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : c \mid a \wedge c \mid b, \end{aligned}$$

in Worten: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, die a und b teilt." Die Verneinung : "Es gibt keine natürliche Zahl $c \neq 1$, die a und b teilt", ist wieder gleichwertig zur Ursprungsaussage.

Wir hatten: $c \mid a \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Z} : a = cd$,

entsprechend $c \mid b \Leftrightarrow \exists\, e \in \mathbb{Z} : b = ce$.

Eingesetzt: $\forall\, c \in \mathbb{N} : (\exists\, d \in \mathbb{Z} : a = cd) \wedge (\exists\, e \in \mathbb{Z} : b = ce) \Rightarrow c = 1$.

Verneinung:

$$\begin{aligned} &\exists\, c \in \mathbb{N} : (\exists\, d \in \mathbb{Z} : a = cd) \wedge (\exists\, e \in \mathbb{Z} : b = ce) \wedge (c \neq 1) \\ \Leftrightarrow\; &\exists\, c \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\; \exists\, d \in \mathbb{Z}\; \exists\, e \in \mathbb{Z} : a = cd \wedge b = ce. \end{aligned}$$

In Worten: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, eine ganze Zahl d und eine ganze Zahl e mit $a = cd$ und $b = ce$."

Auch möglich: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, eine ganze Zahl d und eine ganze Zahl e, so dass die Gleichungen $a = cd$ und $b = ce$ gelten."