

Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 5, Besprechung am 18.9.2014

Aufgabe 1: Vereinigung reeller Intervalle.

Schreiben Sie die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen und beweisen Sie Ihre Behauptung:

$$A := \{x \in \mathbb{R}; |x| < 2\},$$

$$B := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 3\},$$

$$C := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |2x - 3| \geq 0.5\},$$

$$D := \{x \in \mathbb{R}; x^2 < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R}; |x - 2| \leq 3\},$$

$$E := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; (x - 1)^2 \geq 2\}.$$

Lösung:

Zu A: Es ist $A = (-2, 2)$, da $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Zu B: Es ist $B = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$, denn:

$$x \in B \Leftrightarrow \neg(|x| \leq 3) \Leftrightarrow \neg(-3 \leq x \leq 3) \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \vee x \in (3, \infty).$$

Zu C: Es ist $C = (1.25, 1.75)$, denn:

$$x \in C \Leftrightarrow \neg(|2x - 3| \geq 0.5) \Leftrightarrow |2x - 3| < 0.5 \Leftrightarrow -0.5 < 2x - 3 < 0.5 \Leftrightarrow x > 1.25 \wedge x < 1.75.$$

Zu D: Es ist $D = [-1, 2)$, denn:

$$x \in D \Leftrightarrow x^2 < 4 \wedge |x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \wedge -3 \leq x - 2 \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-2, 2) \cap [-1, 5] = [-1, 2).$$

Zu E: Es ist $E = (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, denn:

$$x \in E \Leftrightarrow (x - 1)^2 < 2 \Leftrightarrow |x - 1| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x - 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}.$$

Bemerkung: Ein beliebiger Fehler ist es, nach dem Wurzelziehen eines Quadrats den Betrag zu vergessen. Dass $\sqrt{x^2} = |x|$ ist für alle reellen x , sollte man sich unbedingt merken.

Aufgabe 2: Supremum, Maximum und obere Schranken.

Bestimmen Sie das Supremum und Maximum der folgenden Mengen reeller Zahlen, falls existent, und geben Sie jeweils die Menge aller oberer Schranken an:

$$A := \{e, 1\},$$

$$D := \{2n; n \in \mathbb{N}\},$$

$$B := \left\{2 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$E := \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\},$$

$$C := \left\{\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$F := \{x \in \mathbb{Q}; (x+1)^2 = 3\}.$$

Lösung:

Bem.: Mit e ist die Eulersche Zahl $e = 2.7182818284\dots$ gemeint.

$\sup A = e$, $\max A = e$, Menge der o. S.: $[e, \infty)$

$\sup B = 2$, $\max B$ ex. nicht, Menge der o. S.: $[2, \infty)$

$\sup C = 1$, $\max C$ ex. nicht, Menge der o. S.: $[1, \infty)$

$\sup D$, $\max D$ ex. nicht, Menge der o. S.: $\emptyset$

$\sup E = \sqrt{2}$, $\max E$ ex. nicht, Menge der o. S.: $[\sqrt{2}, \infty)$

$F = \emptyset$, $\sup F$ und $\max F$ ex. deshalb nicht, Menge der o. S. ist $\mathbb{R}$.

Bem.: Wir haben bei der Bestimmung von F verwendet, dass $\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1$ beide irrational sind. Wäre eine der Zahlen rational, z.B. $\sqrt{3} - 1 = u/v$, so wäre auch $\sqrt{3} = 1 + u/v = (v + u)/v$ rational; aber wir wissen schon aus der Vorlesung, dass das nicht stimmt.

Bem.: Es ist $\{x \in \mathbb{R}; \forall y \in F : y \leq x\} = \mathbb{R}$, denn die Bedingung $\forall y \in F : y \leq x$ ist immer wahr: Wird diese gelesen als $\forall y \in \mathbb{R} : y \in F \Rightarrow y \leq x$, so ist $y \in F$ falsch für alle $y \in \mathbb{R}$, also die Implikation insgesamt eine wahre Aussage.

Aufgabe 3: Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen.

Bestimmen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

$$a : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, \quad a(1) = 1, \quad a(2) = 3, \quad a(3) = 3, \quad a(4) = 2$$

$$b : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, \quad b(1) = 1, \quad b(2) = 3, \quad b(3) = 3, \quad b(4) = 2$$

$$c : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, \quad c(1) = 1, \quad c(2) = 3, \quad c(3) = 4, \quad c(4) = 2$$

$$d : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2\}, \quad d(1) = 1, \quad d(2) = 1, \quad d(3) = 2, \quad d(4) = 1$$

$$e : \{1\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad e(1) = 5$$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g(1) = 1 \text{ und } g(n) = n - 1 \text{ für } n > 1$$

$$h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad h(n) = n - 1, \text{ für gerades } n \text{ und } h(n) = n + 1, \text{ für ungerades } n$$

Lösung:

a ist surjektiv (alle Elemente der Zielmenge sind Bildwerte von a) und nicht injektiv (da $a(2) = 3 = a(3)$),

b ist nicht surjektiv (das Element 4 der Zielmenge ist kein Bildwert von b) und nicht injektiv (da $b(2) = 3 = b(3)$),

c ist bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv, denn jedes Element der Zielmenge wird genau einmal als Bildwert angenommen (kommt genau einmal als Bildwert vor)

d ist surjektiv (alle Elemente der Zielmenge sind Bildwerte von d) und nicht injektiv (da $d(1) = 1 = d(2)$),

e ist injektiv (keine zwei Elemente der Definitionsmenge werden auf denselben Bildwert abgebildet) und nicht surjektiv (z.B. das Element 2 der Zielmenge wird nicht angenommen).

Somit sind die Abbildungen a, b, d und e auch alle nicht bijektiv.

Die Abbildung f ist injektiv, da keine zwei verschiedenen natürlichen Zahlen n und m auf dieselbe gerade Zahl abgebildet wird (denn $f(n) = f(m) \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m$). Die Abbildung f ist nicht surjektiv, da die ungeraden Zahlen im Zielbereich nicht als Bildwerte angenommen werden.

Die Abbildung g ist nicht injektiv, da $g(2) = 1 = g(1)$ gilt. Sie ist aber surjektiv, da jedes $n \in \mathbb{N}$ im Zielbereich das Bild einer natürlichen Zahl, nämlich von $n + 1$ ist: Es ist $g(n + 1) = (n + 1) - 1 = n$.

Die Abbildung h ist surjektiv, denn jedes $n \in \mathbb{N}$ im Zielbereich ist das Bild einer natürlichen Zahl, nämlich von $n + 1$, wenn n ungerade ist, und von $n - 1$, wenn n gerade ist.

Formal aufgeschrieben:

$$n = \begin{cases} h(n+1), & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ h(n-1), & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Abbildung h ist injektiv, denn gilt $h(n) = h(m)$ für zwei natürliche Zahlen n und m , so muss notwendig $n = m$ sein:

Aus $h(n) = h(m)$ folgt, dass n und m dieselbe Parität haben müssen (das bedeutet, dass n und m beide gerade oder beide ungerade sein sind), denn die Abbildung h wechselt die Parität: Hätten n und m verschiedene Parität, müssten auch $h(n)$ und $h(m)$ verschiedene Parität haben, aber wir haben angenommen, dass $h(n)$ und $h(m)$ gleich sind. Es bleiben die folgenden zwei Fälle zu betrachten:

Sind n und m beide gerade, so gilt $h(n) = h(m) \Rightarrow n - 1 = m - 1 \Rightarrow n = m$.

Sind n und m beide ungerade, gilt $h(n) = h(m) \Rightarrow n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m$.

Bemerkung: Wer die obige Paritätsüberlegung für h zu kompliziert findet, kann auch einfach die beiden weiteren Fälle von Hand ausschließen:

Ist n gerade und m ungerade, so gilt $h(n) = h(m) \Rightarrow n - 1 = m + 1 \Rightarrow n = m + 2$, aber dann müsste mit m auch n ungerade sein, was nicht der Fall ist.

Ist n ungerade und m gerade, so gilt $h(n) = h(m) \Rightarrow n + 1 = m - 1 \Rightarrow n = m - 2$, aber dann müsste mit m auch n gerade sein, was nicht der Fall ist.

Also ist h eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die kein Element auf sich abbildet. Finden Sie noch weitere solche Abbildungen?