Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 6, Besprechung am 23.9.2014

Aufgabe 1: Konvergenz reeller Folgen.

Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{1-n^3} & \text{für } n \in \{163, 164, \ldots, 163163\}, \\ 100 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$c_n = \Big(-\frac{5}{4}\Big)^n, \quad d_n = \Big(-\frac{4}{5}\Big)^n.$$

Wie lautet die Menge der oberen Schranken der Mengen $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ und $D = \{d_1, d_2, d_3, \ldots\}$?

Lösung:

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, da $\frac{1}{n^2}$ Nullfolge und $(-1)^{n-1}$ beschränkt ist.
- Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 100, da die Folgenglieder für $n \geq 163164$ konstant gleich 100 bleiben.
- Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, denn es gilt:

  $$\forall\, c\ \exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, n_0\ \exists\, n > n_0 : |c_n - c| \geq \varepsilon_0.$$

  Bew.: Für $c \in \mathbb{R}$ wähle $\varepsilon_0 := 1$. Für n gerade und groß (mind. einem n_0) ist $(\frac{5}{4})^n \geq c+1$, also ist $|c_n - c| = (\frac{5}{4})^n - c \geq \varepsilon_0$. □
- Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0: Sei $\varepsilon > 0$, dazu $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist für alle $n \geq n_0$:

  $$|d_n - 0| = \Big(\frac{4}{5}\Big)^n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon. \quad \square$$

Bem.: 1.) Die noch zu zeigende Ungleichung $(\frac{5}{4})^n \geq c+1$ ist umformbar zu $\Leftrightarrow n\ln(5/4) \geq \ln(c+1) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(c+1)}{\ln(5/4)}$. Daher gilt sie ab der kleinsten ganzen Zahl n_0, die größer gleich $\frac{\ln(c+1)}{\ln(5/4)}$ ist, d. h. für alle $n \geq n_0$.

2.) Die noch zu zeigende Ungleichung $(\frac{4}{5})^n < \frac{1}{n}$ ab einem n_0 (hier geht erst $n_0 := 11$, wie man per TR nachrechnet) lässt sich mit vollständiger Induktion beweisen: Für $n = 11$ gilt sie, und gilt diese für n, dann auch für $n+1$ wegen

$$\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} = \frac{4}{5} \cdot \Big(\frac{4}{5}\Big)^n \overset{\text{Ind.Vor.}}{<} \frac{4}{5n} \leq \frac{1}{n+1},$$

da

$$\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5} \leq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \text{ für } n \geq 4 \text{ gilt.}$$

□

Die Menge der oberen Schranken von A ist $[1, \infty)$, die von B ist $[100, \infty)$, die von C ist $\emptyset$ weil $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge ist, die von D ist $[\frac{16}{25}, \infty)$.

Aufgabe 2: Summenzeichen, Teleskopprinzip und Indexverschiebung

(a) Berechnen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=21}^{30}((k-20)^5 - (k-20)^7)$$

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1).$$

Lösung:

Zu (a): Wir machen in der zweiten Summe eine Indexverschiebung: Setzen wir dort $m := k - 20$, so ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=21}^{30}((k-20)^5 - (k-20)^7) \\
=&\sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{m=1}^{10}(m^5 - m^7) \\
=&\sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=1}^{10}(k^5 - k^7) \\
=&\sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k + k^5 - k^7) \\
=&\sum_{k=1}^{10} k \overset{\text{kl. Gauß}}{=} \frac{10 \cdot 11}{2} = 55.
\end{aligned}$$

Zu (b): Beweis mit dem Teleskopprinzip:

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \\
&= (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + (\ln(4) - \ln(3)) + \cdots \\
&\qquad\qquad + (\ln(n) - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln(n)) \\
&= (-\ln(1) + \ln(2)) + (-\ln(2) + \ln(3)) + (-\ln(3) + \ln(4)) + \cdots \\
&\qquad\qquad + (-\ln(n) + \ln(n+1)) \\
&= -\ln(1) + \underbrace{(\ln(2) - \ln(2))}_{=0} + \underbrace{(\ln(3) - \ln(3))}_{=0} + \cdots + \underbrace{(\ln(n) - \ln(n))}_{=0} + \ln(n+1) \\
&= \underbrace{-\ln(1)}_{\text{Okular}} + \underbrace{0}_{\text{Luft}} + \underbrace{\ln(n+1)}_{\text{Objektiv}} = \ln(n+1).
\end{aligned}$$

$\square$

Beweis mit Indexverschiebung: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))\\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k).\end{aligned}$$

In der ersten Summe führen wir mit $m = k+1$ eine Indexverschiebung durch und setzen die Rechnung fort mit

$$\begin{aligned}&= \sum_{m=2}^{n+1}\ln(m)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\\ &= -\ln(1)+\ln(n+1)+\sum_{m=1}^{n}\ln(m)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\\ &= -\ln(1)+\ln(n+1)+\sum_{k=1}^{n}\ln(k)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\\ &= -\ln(1)+\ln(n+1)=\ln(n+1).\end{aligned}$$

$\square$

Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Sei $n := 1$, dann ist $l.S.(1) = \ln(1+1) = r.S.(1)$.

Induktionsschritt: Sei die Aussage wahr für $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung), wir zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt: Es ist

$$\begin{aligned}l.S.(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\ &\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \ln(n+1)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \ln(n+1)+\ln\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)\\ &= \ln(n+1)+\ln((n+1)+1)-\ln(n+1)\\ &= \ln((n+1)+1) = r.S.(n+1).\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 3*: Konvergenz bei Rekursionen.

Ist die (rekursiv definierte) Folge $x_1 := 1$, $x_{n+1} := \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$ konvergent? Stellen Sie eine Vermutung dazu auf und beweisen Sie diese.

Lösung:

Beh.: Die Folge konvergiert gegen $\sqrt{2}$.

Bew.: Wenn die Folge konvergiert, so ist leicht zu sehen, dass der Grenzwert dann $\sqrt{2}$ sein muss: Ist a der Grenzwert, so ist aus der Rekursionsgleichung ersichtlich, dass die linke Seite eine Folge ist, die gegen a konvergiert, und die rechte Seite gegen $\frac{1}{a}+\frac{a}{2}$, also gilt

$$a = \frac{1}{a}+\frac{a}{2} \Leftrightarrow a-\frac{a}{2}=\frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{2}=\frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2=2 \Leftrightarrow a=\sqrt{2} \vee a=-\sqrt{2}.$$

Weil die Folgenglieder alle > 0 sind, muss $+\sqrt{2}$ der Grenzwert sein.

Bleibt noch der Beweis, dass die Folge tatsächlich konvergent ist.

Dies zeigen wir in zwei Schritten:

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $1 \leq x_n < 2$. Dies zeigen wir induktiv: Klar ist dies für $n = 1$, und gilt diese Abschätzung für n, dann auch für $n + 1$ wegen

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < \underbrace{\frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}}_{=x_{n+1}} < \frac{1}{1} + \frac{2}{2} = 2.$$

(2) Weiter ist die Folge $x_n^2 - 2$ eine Nullfolge, denn wir zeigen die Abschätzung $|x_n^2 - 2| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ durch vollständige Induktion wie folgt: Es ist $|1^2 - 2| = 1 = \frac{1}{2^0}$, und gilt die Abschätzung für n, dann auch für $n + 1$ wegen

$$\begin{aligned} |x_{n+1}^2 - 2| &= \left|\left(x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}\right)^2 - 2\right| = \left|x_n^2 - 2x_n \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} + \left(\frac{x_n^2 - 2}{2x_n}\right)^2 - 2\right| \\ &= \left(\frac{x_n^2 - 2}{2x_n}\right)^2 \leq \frac{1}{2^2} \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n}} \leq \frac{1}{2^{(n+1)-1}}, \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Ungleichung die Induktionsvoraussetzung und (1) in der Form $x_n \geq 1$ verwendet wurde.

Da also $x_n^2 - 2$ eine Nullfolge ist, muss die Folge konvergieren.