Lösungshinweise zum letzten Übungsblatt Nr. 7, Besprechung am 25.9.2014

Aufgabe 1: Rechnen mit exp und ln.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ fest. Geben Sie (in Abhängigkeit von a, b, c) die Lösungsmenge der $x \in \mathbb{R}$ an, die die folgenden Gleichungen lösen.

(i) $a^{\ln(x^b)} = c$, (ii) $x^x = 1$, (iii) $(\ln(a))^x = b$,
(iv) $\exp(cx)^a = 2^b$, (v) $\ln\left(\dfrac{a}{e^{x-c}}\right) = b$, (vi) $x^{2\ln(a)} = 2^b$.

Lösung:

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ fest gewählt. Wir bestimmen für jede Gleichung die Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

(i) Es ist

$$a^{\ln(x^b)} = c \Leftrightarrow e^{\ln(x^b)\ln(a)} = c \Leftrightarrow e^{b\ln(a)\ln(x)} = e^{\ln(c)} \Leftrightarrow b\ln(a)\ln(x) = \ln(c)$$
$$\overset{a\neq 1}{\Leftrightarrow} \ln(x) = \frac{\ln(c)}{b\ln(a)} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{\ln(c)}{b\ln(a)}\right).$$

Für $a = 1$ ist die linke Seite in der Gleichung $b\ln(a)\ln(x) = \ln(c)$ gleich Null, die Lösbarkeit hängt dann von c ab. Es folgt:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\exp(\frac{\ln(c)}{b\ln(a)})\}, & \text{falls } a \neq 1, \\ \mathbb{R}_{>0}, & \text{falls } a = 1 \wedge c = 1, \\ \emptyset, & \text{falls } a = 1 \wedge c \neq 1. \end{cases}$$

(ii) Vorbem.: Der Ausdruck x^x ist für $x \geq 0$ definiert, denn wir haben $0^0 := 1$ definiert. Damit können wir die Aufgabe wie folgt lösen, denn man beachte, dass $\ln(x)$ nicht für $x = 0$ definiert ist: $x^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{x\ln(x)} = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$, also ist hier $\mathbb{L} = \{0, 1\}$.

(iii) Vorbem.: Der Ausdruck $(\ln(a))^x$ ist lediglich für $a > 1$ definiert. Wir bestimmen die Lösungsmenge für $a > 1$ wie folgt: Es ist $(\ln(a))^x = b \Leftrightarrow e^{x\ln(\ln(a))} = b = e^{\ln(b)} \Leftrightarrow x\ln(\ln(a)) = \ln(b)$. Die linke Seite ist gleich Null, wenn $\ln(a) = 1$, also wenn $a = e$ ist. Wieder wird eine Fallunterscheidung nötig:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\frac{\ln(b)}{\ln(\ln(a))}\}, & \text{falls } a \neq e, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } a = e \wedge b = 1, \\ \emptyset, & \text{falls } a = e \wedge b \neq 1. \end{cases}$$

(iv) $\exp(cx)^a = 2^b \Leftrightarrow \exp(acx) = \exp b\ln(2) \Leftrightarrow acx = b\ln(2) \overset{ac\neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{b\ln(2)}{ac}$. Es ist daher

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\frac{b\ln(2)}{ac}\}, & \text{falls } ac \neq 0, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } ac = 0 \wedge b = 0, \\ \emptyset, & \text{falls } ac = 0 \wedge b \neq 0. \end{cases}$$

(v) $\ln(\frac{a}{e^{x-c}}) = b \Leftrightarrow \frac{a}{e^{x-c}} = e^b \Leftrightarrow a = e^{b+x-c} \Leftrightarrow x + b - c = \ln(a) \Leftrightarrow x = \ln(a) - b + c$. Also ist $\mathbb{L} = \{\ln(a) - b + c\}$.

(vi) $x^{2\ln(a)} = 2^b \Leftrightarrow e^{2\ln(a)\ln(x)} = e^{b\ln(2)} \Leftrightarrow 2\ln(a)\ln(x) = b\ln(2) \overset{a\neq 1}{\Leftrightarrow} \ln(x) = \frac{b\ln(2)}{2\ln(a)} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{b\ln(2)}{2\ln(a)}\right)$. Also ist

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\exp(\frac{b\ln(2)}{2\ln(a)})\}, & \text{falls } a \neq 1, \\ \mathbb{R}_{>0}, & \text{falls } a = 1 \wedge b = 0, \\ \emptyset, & \text{falls } a = 1 \wedge b \neq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2: Rechnen mit komplexen Zahlen.

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, wobei $i^2 = -1$. Berechnen Sie weiter das komplex Konjugierte, den Betrag, das multiplikativ Inverse sowie das Quadrat dieser komplexen Zahlen.

(i) $\dfrac{1}{1+i}$, (ii) $\dfrac{1-2i}{1+2i}$, (iii) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{2-i}{3i}$, (iv) $\left(\dfrac{1-2i}{2+i}\right)^2$.

Lösung:

(i) $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{1-(-1)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Komplex Konjugiertes: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, Betrag: $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, Quadrat: $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{2} = -\frac{i}{2}$, multiplikatives Inverses: $1/(1/(1+i)) = 1 + i$.

(ii) $\frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-4i+(-4)}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$. Komplex Konjugiertes: $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, Betrag: $\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$ bzw. $\frac{|1-2i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$, Quadrat: $\frac{1}{25}(-3-4i)^2 = \frac{1}{25}(9 - 16 + 24i) = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i$, multiplikatives Inverses: $\frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1+4i+(-4)}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. (Haben hier eine Zahl, deren komplex Konjugiertes gleich ihrem multiplikativen Inversen ist. Für welche komplexe Zahlen trifft das zu?)

(iii) $\frac{1}{i} + \frac{2-i}{3i} = \frac{i}{-1} + \frac{(2-i)i}{-3} = -i - \frac{2}{3}i - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$. Komplex Konjugiertes: $-\frac{1}{3} + \frac{5}{3}i$, Betrag: $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{26}$, Quadrat: $\frac{1}{9}(1+5i)^2 = \frac{1}{9}(1 + 10i - 25) = \frac{1}{9}(-24 + 10i)$, multiplikatives Inverses: $\frac{-3}{1+5i} = \frac{-3(1-5i)}{1-25} = \frac{-3+15i}{-24} = \frac{1}{8} - \frac{5}{8}i$.

(iv) $\left(\frac{1-2i}{2+i}\right)^2 = \left(\frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right)^2 = \left(\frac{2-i-4i-2}{5}\right)^2 = \frac{(-5i)^2}{5^2} = -1$. Komplex Konjugiertes: -1, Betrag: 1, Quadrat: $(-1)^2 = 1$, multiplikatives Inverses: -1.

Aufgabe 3: Zahlenmengen in der komplexen Ebene.

Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Ebene:

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C};\ \left|\frac{1-2z}{z+i}\right| = 1 \right\}$$

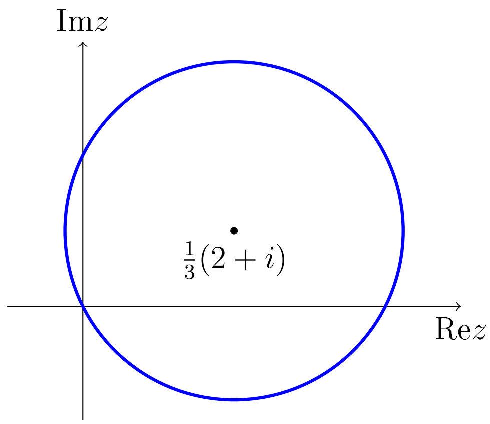
Lösung:

Wir setzen $z = x + iy$, dann rechnen wir:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1-2z}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1-2(x+iy)}{x+i(y+1)}\right|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(1-2x)^2 + 4y^2}{x^2 + (y+1)^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow (1-2x)^2 + 4y^2 &= x^2 + (y+1)^2 \\ \Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 + 4y^2 &= x^2 + y^2 + 1 + 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 4x - 2y = 0\\
&\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + y^2 - \frac{2}{3}y = 0\\
&\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0\\
&\Leftrightarrow \Big(x - \frac{2}{3}\Big)^2 + \Big(y - \frac{1}{3}\Big)^2 = \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

Also ist M ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt $\frac{1}{3}(2+i)$ und Radius $\frac{1}{3}\sqrt{5}$.



Aufgabe 4*: Werte der komplexen Sinusfunktion.
Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt (a) $\sin z \in \mathbb{R}$, (b) $\sin z = 1$?

Lösung:
Mit dem Ansatz $z = x + iy$ erhalten wir die Darstellung

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\\
&= \frac{1}{2i}(e^{ix-y} - e^{-ix+y})\\
&= \frac{1}{2i}\big(e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\big)\\
&= \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y})\cos x + \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})\sin x.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

(a) $\sin z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee e^{-y} - e^{y} = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \vee y = 0$

(b) $\sin z = 1 \Rightarrow y = 0 \vee x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ nach vorigem.

1. Fall: Ist $y = 0$, folgt $\sin x = \sin z = 1$, also $x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Fall: Ist $y \neq 0$, folgt $\cos x = 0$ und $\sin x = \pm 1$, also $1 = \sin z = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y})\sin x = \frac{\pm 1}{2}(e^{-y} + e^{y})$, also $e^{-y} + e^{y} = \pm 2$.
Hier ist der Fall $e^{-y} + e^{y} = -2$ ausgeschlossen, es bleibt der Fall $\sin x = +1$ und somit ist $x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Es bleibt die Gleichung $e^{-y} + e^{y} = 2$ zu lösen. Der Ansatz $w = e^{y}$ zeigt $\frac{1}{w} + w = 2 \Leftrightarrow w^2 - 2w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = 1$, d. h. für y finden wir nur die Lösung $y = 0$, was im 2. Fall ausgeschlossen wurde. Nur der 1. Fall ist deswegen möglich.

Unser Ergebnis lautet also: $\sin z = 1 \Leftrightarrow z \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.