

Übungsblatt Nr. 2, Besprechung am 9.9.2014

Bitte das Übungsblatt möglichst ausgedruckt in die Übung mitbringen.

Aufgabe 1: Deutsch \rightarrow Formel, Formel \rightarrow Deutsch

Gegeben seien folgende deutsche Sätze:

1. "Person x , die keinen anderweitigen Anspruch auf Absicherung im Krankheitsfall hat und zuletzt gesetzlich krankenversichert war, ist versicherungspflichtig."
2. "Wenn man nachts ohne Licht fährt, sieht man nichts; es sei denn, es ist Vollmond."

Schreiben Sie die Sätze jeweils formal als Implikation auf (kürzen Sie Teile davon ab als A , B , C usw.), und bilden Sie die formale Verneinung bzw. Kontraposition. Wie formuliert man die Verneinung bzw. Kontraposition wieder als deutschen Satz?

Beispiel 1: Der Satz "Wenn es regnet oder der Gulli überläuft, wird die Straße nass." ist formalisierbar als $(A \vee B) \Rightarrow C$. Die Verneinung ist $\neg((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B)) \wedge \neg C \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg C$ und bedeutet "Es regnet oder der Gulli läuft über, und die Straße bleibt trocken." Die Kontraposition ist $(\neg C \Rightarrow \neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))$ und bedeutet "Wenn die Straße trocken bleibt, dann regnet es nicht, und auch der Gulli läuft nicht über."

Aufgabe 2: Rechnen mit Aussagenformeln.

Seien A und B Aussagen. Formulieren Sie die folgenden Aussagen um in dazu äquivalente Aussagen, die nur mit den Zeichen \wedge , \vee und \neg auskommen. Verwenden Sie dafür die Logikregeln aus der Vorlesung.

1. $\neg(\neg A \wedge (B \vee A) \Rightarrow A)$
2. $A \wedge \neg(A \Leftrightarrow \neg B)$
3. $(A \Rightarrow B) \wedge \neg(B \Rightarrow A)$
4. $A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A \vee B)$

Wie lauten die Verneinungen dieser Aussagen?

Aufgabe 3: Beispiele für Beweisverfahren.

Welches Beweisverfahren wird in den folgenden Beweisen benutzt?

(Bem.: Das Zeichen $a \mid b$ heißt " a teilt b ")

Vergleichen Sie die Beweise miteinander: Einmal rein äußerlich, andererseits auch inhaltlich: Wo wird direkt, wo indirekt argumentiert? (Wenn Sie nicht alles inhaltlich verstehen, ist das nicht so schlimm. Sie sollen hier nur Beispiele sehen, wie man logische Argumentationen "mathematisch" richtig aufschreiben kann.)

Satz 1: Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

Beweis: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, etwa $n, n + 1, n + 2$, ist $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3 \cdot (n + 1)$, also durch drei teilbar. \square

Satz 2: Vor.: a, b, c seien aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Beh.: $3 \mid a + b + c$.

Bew.: Laut Vor. ist $b = a + 1$ und $c = b + 1 = (a + 1) + 1 = a + 2$. Dann gilt: $a + b + c = a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3 = 3 \cdot (a + 1) \Rightarrow 3 \mid a + b + c$. \square

Satz 3: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Angenommen, es gäbe nur die endlich vielen Primzahlen p_1, \dots, p_r . Dann ist die natürliche Zahl $n := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1$ durch keine der Primzahlen p_1, \dots, p_r teilbar. Da aber jede natürliche Zahl > 1 durch eine Primzahl (etwa der kleinste Teiler von n , der > 1 ist, vgl. Satz 4) teilbar sein muss, existiert noch eine weitere Primzahl, im Widerspruch zur Annahme. \square

Satz 4: Jede natürliche Zahl $n > 1$ ist durch eine Primzahl teilbar.

Bew.: Sei p der kleinste Teiler > 1 , der n teilt. Dann ist p prim, denn wäre p zusammengesetzt aus zwei Faktoren $a, b > 1$, so wäre $a > 1$ ein Teiler von n , der kleiner ist als p , im Widerspruch zur Wahl von p . Also ist p prim. \square

Satz 5: Sei \mathbb{P} die Menge der Primzahlen. Dann ist \mathbb{P} unendlich groß.

Bew.: Ann.: $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_r\}$.

Betrachte $n := p_1 \cdot \dots \cdot p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \dots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \dots, p_r\}$, Widerspruch. \square

Bem.: Die Behauptung in Satz 4 ist auch als $\forall n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{P} : p \mid n$ schreibbar.

Satz 6: Sei \mathbb{P} die Menge der Primzahlen. Dann ist \mathbb{P} unendlich groß.

Bew.: Wir konstruieren eine unendlich große Menge von Primzahlen wie folgt: Sei p_1 eine Primzahl, etwa $p_1 := 2$. Sind Primzahlen p_1, \dots, p_r gegeben, betrachte man $n := p_1 \cdot \dots \cdot p_r + 1$. Dann ist $p_1 \nmid n, \dots, p_r \nmid n$. Nach Satz 4 ex. $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$, und es gilt $p \notin \{p_1, \dots, p_r\}$, setze dann $p_{r+1} := p$. Auf diese Weise können unendlich viele Primzahlen p_1, p_2, p_3, \dots konstruiert werden. \square