Übungsblatt Nr. 4, Besprechung am 16.9.2014

Aufgabe 1: Vollständige Induktion.

Zeigen Sie die folgenden Sätze mit vollständiger Induktion:

$$(a) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$(b) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 2: Noch mehr vollständige Induktion.

Zeigen Sie:

(1) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3n^2 > (n+1)^2$.

(2) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3^n > n^2$.

(3) Sei g eine (beliebige) der beiden Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 - x - 1$. Dann gilt $g^n = g^{n-1} + g^{n-2}$ für alle natürlichen Zahlen n, die größer als 1 sind (man beachte $g^0 = 1$).

Aufgabe 3: Logik der Definition eines teilerfremden Zahlenpaares.

Im Skript wurde durch die Aussage

$$\forall\, c \in \mathbb{N}: \ c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c = 1$$

definiert, dass zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ *teilerfremd* sind. Wie kann man diese Aussage rein sprachlich ausdrücken? Schreiben Sie die formale Verneinung der Aussage auf und drücken Sie diese ebenfalls sprachlich aus.

Denken Sie daran, dass "$c \mid a$" und "$c \mid b$" ebenfalls Abkürzungen für Aussagen sind; diese enthalten einen Existenzquantor. Wenn man diese Aussagen dann in die Definition einsetzt, wie lautet dann die formale Verneinung und ihre sprachliche Umsetzung?