Übungsblatt Nr. 6, Besprechung am 23.9.2014

Aufgabe 1: Konvergenz reeller Folgen.

Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{1-n^3} & \text{für } n \in \{163, 164, \dots, 163163\}, \\ 100 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$c_n = \Big(-\frac{5}{4}\Big)^n, \quad d_n = \Big(-\frac{4}{5}\Big)^n.$$

Wie lautet die Menge der oberen Schranken der Mengen $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ und $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$?

Aufgabe 2: Summenzeichen, Teleskopprinzip und Indexverschiebung

(a) Berechnen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=21}^{30}((k-20)^5 - (k-20)^7)$$

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1 + \frac{1}{k}\Big) = \ln(n+1).$$

Tipp: $\ln(1 + \frac{1}{k}) = \ln(\frac{k+1}{k}) = \ln(k+1) - \ln(k)$.

Aufgabe 3*: Konvergenz bei Rekursionen.

Ist die (rekursiv definierte) Folge

$$x_1 := 1, \quad x_{n+1} := \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

konvergent? Stellen Sie eine Vermutung dazu auf und beweisen Sie diese.