Vorkurs Mathematik 2014

WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik

PD Dr. K. Halupczok

Skript VK7 vom 25.9.2014

Analysis: Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integration

- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit
- Integration

Bisher haben wir Grenzwerte von reellen Zahlenfolgen betrachtet. Wir möchten jetzt auch Funktionengrenzwerte untersuchen und so etwas wie $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ schreiben dürfen. Das Symbol $x \to 0$ soll dabei heißen, dass wir für x alle möglichen Nullfolgen einsetzen können und dabei ein bestimmter Wert als Grenzwert herauskommt, egal, welche Nullfolgen wir nehmen.

Das ist nicht selbstverständlich: Für mache Funktionen kann so ein Grenzwert nicht eindeutig gefunden werden, dieser kann nämlich von der Art der Folgen abhängen: So gilt z. B. für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{x}{|x|},\ \text{dass } f\Big(\frac{1}{n}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

$$\text{aber } f\Big(-\frac{1}{n}\Big) \xrightarrow{n\to\infty} -1,$$

obwohl $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beides Nullfolgen sind.

Diese Frage gibt nun Anlass zu der folgenden Definition:
Definition 1: Sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$, und der Eigenschaft

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} a_n = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c)$$

heißt stetig an der Stelle c. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn sie an jeder Stelle $c \in D$ stetig ist.

Diese Definition beschreibt die "Folgenstetigkeit" einer Funktion: Bei einer in c stetigen Funktion f kann man sich dem Funktionswert $f(c)$ durch Funktionswertfolgen annähern.

Die Folgenstetigkeit kann auch so aufgeschrieben werden: Für alle Nullfolgen $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$$f(c+h_n) - f(c) \xrightarrow{h_n\to 0} 0$$

Hier hat man das Symbol $n \to \infty$ weggelassen. Die noch kürzere Notation

$$f(c+h) - f(c) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

meint aber dasselbe, nämlich dass für Nullfolgen, die wir mit $h \to 0$ notieren, die Funktionswerte $f(c+h)$ gegen $f(c)$ konvergieren.

(Betrachten Sie in der Definition $h_n := a_n - c$, und Sie erhalten die äquivalente Version hier.)

In der Analysis gibt es noch eine weitere äquivalente Formulierung für den Stetigkeitsbegriff, die wir jetzt als Satz festhalten:

Satz

("$\varepsilon - \delta$-Stetigkeit")
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $c \in D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $c \in D$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Anstelle von h haben wir in dieser Version eine Schrankenzahl $\delta > 0$ eingeführt, die die Abstände von Punkten x nach c beschränkt.

Gefordert wird in dem Kriterium nun, dass die Funktionswerte $f(x)$ dann nahe $f(c)$ liegen, dass deren Abstand zu $f(c)$ also höchstens so groß ist wie die Schrankenzahl $\varepsilon > 0$.

Um einen Beweis zu führen, dass eine spezielle Funktion stetig an einer Stelle c ist, kann man also auch dieses $\varepsilon - \delta$-Kriterium heranziehen.
Beispiel 1: Wir demonstrieren dies an folgendem Beispiel:
Beh.: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3$, ist an jeder Stelle $c \in \mathbb{R}$ stetig.
Bew.: Sei $c \in \mathbb{R}$ eine zu untersuchende Stelle und man betrachte eine (beliebig vorgebbare) Schrankenzahl $\varepsilon > 0$. In Abhängigkeit von ε kann nun eine Zahl $\delta > 0$ angegeben werden, die die behauptete Implikation erfüllt, nämlich $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$:

Denn ist ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - c| < \delta$ vorgegeben, so folgt $|2x + 3 - (2c + 3)| = |2(x - c)| = 2|x - c| < 2\delta = \varepsilon$. Die Existenz von $\delta > 0$ ist damit durch Konstruktion bewiesen. □

Für kompliziertere Funktionen ist ein solcher $\varepsilon - \delta$-Stetigkeitsbeweis meist auch schwieriger durchzurechnen; man muss dazu gut mit Beträgen rechnen können, um ein passendes $\delta > 0$ in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$ zu finden.

Zur Anschauung kann man sich vorstellen, dass man die Funktion im Koordinatensystem in einem Strich durchzeichnen kann, ohne dabei den Stift absetzen zu müssen. Bei dem Schaubild der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|f(x)| = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$, geht das an der Stelle $c = 0$ nicht mehr; dort ist die Funktion ja auch nicht stetig, wie wir eingangs gesehen haben.

Die üblichen Funktionen, die man aus bisherigen Grundfunktionen wie $x^2, \sqrt{x}, e^x$ usw. ansonsten zusammenstellen kann, sind aber meistens stetig auf ihrem Definitionsbereich.

(Ein paar Stetigkeitssätze helfen dafür natürlich auch, um das zu sehen: Produkt stetiger Funktionen ist stetig, ebenso die Summe, und auch das Einsetzen einer stetigen Funktion in eine stetige ergibt wieder eine stetige Funktion.)

Für solche stetigen Funktionen, wie etwa e^x, macht dann ein Ausdruck der Gestalt $\lim_{x \to 0} e^x$ wirklich Sinn.

Dazu noch ein letztes Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Die Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{1/n}$, ist dann eine überall auf $[0,1]$ stetige Funktion.

Etwas Merkwürdiges passiert, wenn wir hingegen ein $x \in (0,1]$ festhalten und $n \to \infty$ betrachten, dann ist nämlich $\lim_{n \to \infty} x^{1/n} = 1$.

Für $x = 0$ ist aber $\lim_{n \to \infty} 0^{1/n} = 0$.

Offenbar kann die Stetigkeit "kaputtgehen", wenn man zu "Grenzfunktionen" übergeht, und das auch schon bei sehr einfachen Funktionen.

Daher muss man sorgfältig mit dem Stetigkeitsbegriff umgehen, wenn man mehrere Grenzprozesse ($x \to 0$ und $n \to \infty$) gleichzeitig betrachten möchte, offenbar spielt deren Reihenfolge eine große Rolle, denn man hat:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \lim_{n \to \infty} x^{1/n} = 1, \text{ aber } \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 0} x^{1/n} = 0.$$

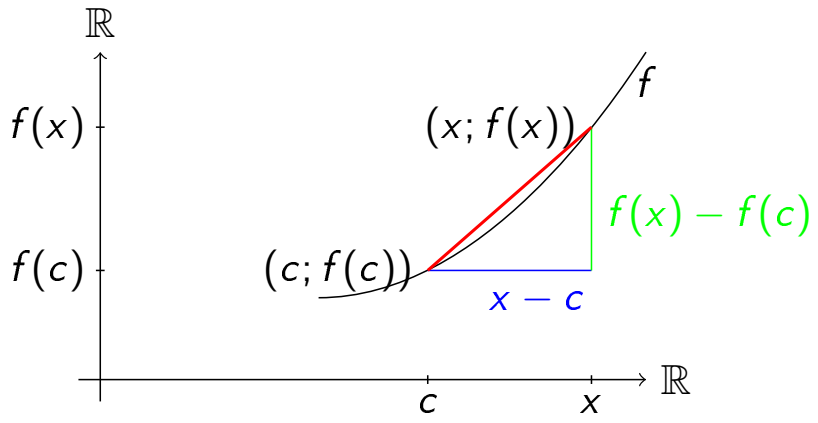
Solche Untersuchungen, wann sich Grenzwertbildungen vertauschen lassen, sind wichtiger Bestandteil der Analysis.

Analysis: Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integration
- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit
- Integration

Aus einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und einem Wert $c \in D$ kann man eine neue Funktion bilden, den Differenzenquotienten

$$Q_{f,c} : D \setminus \{c\} \to \mathbb{R}, \quad Q_{f,c}(x) := \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Anschaulich beschreibt dieser Quotient eine Sekantensteigung der Funktionskurve, wobei die fragliche Sekante einfach die Gerade durch die Punkte $(c, f(c)), (x, f(x)) \in D \times \mathbb{R}$ ist:



Wenn nun der Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{x \to c} Q_{f,c}(x)$ existiert, würden wir diesen Wert anschaulich als Tangentensteigung der Kurve im Punkt $(c, f(c)) \in D \times \mathbb{R}$ identifizieren. Definieren wir den Wert als $Q_{f,c}(c)$, erhalten wir dann eine stetige Funktion $Q_{f,c} : D \to \mathbb{R}$.

Daher die folgende Definition:
Definition 2: Falls $\lim\limits_{x \to c} Q_{f,c}(x)$ existiert, heißt die Funktion f differenzierbar an der Stelle c. Sie heißt differenzierbar, falls sie an *jeder* Stelle $c \in D$ differenzierbar ist. Den Wert $\lim\limits_{x \to c} Q_{f,c}(x)$ nennt man dann auch Ableitung von f an der Stelle c und schreibt dafür $f'(c)$.

Man kann den Grenzwert natürlich auch mittels Folgen ausdrücken: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(c),$$

falls f bei c differenzierbar ist, und zwar für *jede* Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} c$ (bei der für die Folgenglieder $x_n \neq c$ gilt).

Mit der h-Schreibweise ausgedrückt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$$

und der Vereinbarung, dass $h \to 0$ bedeutet, dass diese Aussage für *alle* Nullfolgen (mit Folgengliedern $\neq 0$) gilt, wenn diese anstelle h eingesetzt werden.

Eine Tatsache, die man über differenzierbare Funktionen wissen muss: Eine bei c differenzierbare Funktion ist stetig, aber nicht immer umgekehrt, wie das Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, bei $x = 0$ zeigt.

Definition 3: Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist nun die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ ihrer Ableitungen. Höhere Ableitungen (die zweite, dritte, vierte Ableitung usw.) definiert man über $f^{(1)}(x) := f'(x)$, $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Für die Ableitung von differenzierbaren Funktionen können nun die bekannten Ableitungsregeln bewiesen werden (f, g differenzierbare Funktionen, $c \in \mathbb{R}$. Die Regeln 3 und 4 gelten, falls $g(x) \neq 0$):

1	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	
2	$(cf)'(x) = cf'(x)$	
3	$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	Produktregel
4	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	Quotientenregel
5	$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$	
6	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel
7	$m(x) := x^r,\ r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow m'(x) = rx^{r-1}$	
8	$\exp'(x) = \exp(x),\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$	

Bemerkung: Die Funktion $f \circ g$ ist die *Verkettung* zweier Funktionen f und g, d. h. $f \circ g(x) := f(g(x))$. Die Definitionsbereiche von f und g müssen dafür geeignet zueinander passen.

Beispiel 2: Nach den Regeln hier hat die Funktion $f(x) := a^x = \exp(x \ln a)$ die Ableitung $f'(x) = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \ln a$.

Den weiteren Stoff über die Differenzierbarkeit von Funktionen möchte ich hier nicht vorwegnehmen. Es soll nur ein Highlight der Analysis genannt werden, nämlich der Taylor-Satz. Er besagt inhaltlich, dass sich geeignete Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $a \in D$ durch die Reihe

$$T_f(x, a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

approximieren lassen, d. h. so, dass für x in der Nähe von a dann $f(x) \approx T_f(x, a)$ gilt.

Man sagt dann auch, dass sich f um a als Taylor-Reihe entwickeln lässt. Das ist sehr praktisch, weil man mit Taylor-Partialsummen, die einfach nur spezielle Polynome sind, oft einfacher rechnen kann als mit der ursprünglich gegebenen Funktion f. Das ist genau ein wichtiges Ziel der Analysis: die Berechnung komplizierter Funktionen f mittels einfachen Funktionen wie beispielsweise Polynome. Dann lässt sich deren numerische Berechnung nämlich leicht auf Rechner übertragen.

Ein hinreichendes Kriterium dafür, dass eine solche Taylor-Entwicklung klappt, ist beispielsweise das Folgende (I bezeichnet ein Intervall im Definitionsbereich, das den Punkt a enthält, und f muss unendlich oft differenzierbar sein):

$$\exists\, A, B > 0\ \forall\, x \in I\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ |f^{(n)}(x)| \leq AB^n.$$

Die Entwicklung der Funktion exp um den Punkt 0 liefert genau die Reihe, die wir zur Definition von exp benutzt haben. Die Reihenentwicklung von $\ln(1+x)$ um 0 konvergiert genau für $-1 < x \leq 1$, dort ist dann

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Man sagt für diese Reihenentwicklungen auch "Entwicklung in eine Potenzreihe", denn die Taylor-Reihe ist ein spezielles Beispiel für eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \text{ die } a_k \in \mathbb{C}.$$

Analysis: Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integration

- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit
- Integration

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $[a, b] \subseteq D$. Als Grenzwert von Riemann-Summen (das wird später in der Analysis noch genau formalisiert) definiert man das Integral $\int_a^b f(x)dx$.

Diese reelle Zahl beschreibt ("misst") den Flächeninhalt (versehen mit dem richtigen Vorzeichen) zwischen der x-Achse und dem Kurvenschaubild von f, sofern keine Nullstelle im Intervall I liegt. Genau genommen wird erst durch das Integral der Flächeninhalt definiert.

Aus den Regeln für Grenzwerte bzw. der Definition und früheren Sätzen leitet man dann die folgenden Integrationsregeln ab:
$(a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

1	$\int_a^a f(x)dx = 0$
2	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3	$\int_a^b 1dx = b - a$
4	$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
5	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
6	$(\forall\, x \in [a, b] :\ f(x) \leq g(x)) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
7	$\lvert \int_a^b f(x)dx \rvert \leq \int_a^b \lvert f(x) \rvert dx$

Ein weiteres großes Highlight der Analysis ist nun der Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration, der als *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* bekannt ist:

Satz

Sei f eine auf dem Intervall I stetige Funktion. Dann gilt:

(1) *Die durch*

$$F_a(x) := \int_a^x f(t)dt \qquad a, x \in I$$

definierte Funktion ist eine Stammfunktion von f, d. h. es gilt $F_a'(x) = f(x)$. Jede (andere) Stammfunktion F von f hat die Form $F(x) = F_a(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(2) *Mit einer beliebigen Stammfunktion F von f gilt:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Man schreibt auch $F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$.

Dies besagt, dass die Integration im wesentlichen die Umkehrung der Differentiation ist. Das Ziel der Analysis, dass man komplizierte Funktionen – hier beispielsweise Integrale, die aus der Anwendung kommen – einfach berechnen kann, ist damit gelöst: Die Integralberechnung wurde auf die Umkehrung der Ableitungsbildung zurückgeführt und damit leichtgemacht.

Beispiel 3: Es ist $\int_1^{2.5} x^3 dx \overset{\text{HS}}{=} \frac{x^4}{4}\Big|_1^{2.5} = \frac{2.5^4}{4} - \frac{1^4}{4} \overset{\text{TR}}{=} 9,515625$, denn eine Stammfunktion von $f(x) := x^3$ ist $F(x) := \frac{x^4}{4}$.

Aus den Ableitungsregeln lassen sich weiter auch die folgenden Sätze beweisen, die zum Berechnen von Integralen nützlich sind:

Satz

(Partielle Integration) Seien u, v auf $[a, b]$ differenzierbare Funktionen mit stetiger Ableitung. Dann gilt:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Satz

(Substitutionsmethode) Seien g, f auf $[a, b]$ bzw. $[g(a), g(b)]$ differenzierbare Funktionen mit stetiger Ableitung. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

Ein paar Beispiele, wie diese Integrationsmethoden eingesetzt werden können:

Beispiel 4: Ein Beispiel zum partiellen Integrieren:
Mit $u'(x) := x$ und $v(x) := \ln(x+3)$ ist
$\int_0^1 x\ln(x+3)dx \overset{\text{PI}}{=} \frac{1}{2}x^2\ln(x+3)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2-9+9}{x+3}dx = \frac{1}{2}\ln 2^2 -$
$\frac{1}{2}\int_0^1 (x-3)dx - \frac{9}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+3}dx = \ln 2 - \frac{1}{4}(x-3)^2\Big|_0^1 - \frac{9}{2}\ln(x+3)\Big|_0^1 =$
$\ln 2 - 1 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2}\ln 2^2 + \frac{9}{2}\ln 3 = \frac{5}{4} - 8\ln 2 + \frac{9}{2}\ln 3 \overset{\text{TR}}{\approx} 0.648578.$

Beispiel 5: Ein Beispiel zur Substitutionsmethode: Mit
$g(x) := \ln x$ und $f(t) := t$, $g(e) = 1$ und $g(e^2) = 2$ ist
$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx = \int_e^{e^2} \ln x \cdot \frac{1}{x}dx \overset{\text{SM}}{=} \int_1^2 tdt = \frac{1}{2}t^2\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) = \frac{3}{2}.$

Beispiel 6: Weiter ein Beispiel, in dem beide Methoden eingesetzt werden:
Es ist $\int_0^1 3^{\sqrt{2x+1}}dx \overset{\text{SM}}{=} \int_1^{\sqrt{3}} t3^t dt \overset{\text{PI}}{=} 3^t \cdot \frac{t}{\ln 3}\Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} 3^t \frac{1}{\ln 3}dt =$
$3^t \cdot \frac{t}{\ln 3}\Big|_1^{\sqrt{3}} - \frac{3^t}{(\ln 3)^2}\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\ln 3}\left(3^{\sqrt{3}}\sqrt{3} - 3 - \frac{3^{\sqrt{3}}}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 3}\right).$

Die geschlossene Integration wie in diesen Beispielen ist nicht immer leicht ausführbar, manchmal benötigt man nicht unmittelbar klare "Lösungstricks", und manchmal ist eine Integration gar nicht in Formeln exakt lösbar. Dann werden rein numerische Methoden eingesetzt, mit denen Näherungslösungen beliebiger vorgegebener Genauigkeit möglich sind.

Wichtig im Zusammenhang mit dem Integrieren ist noch die sogenannte *Standardabschätzung*:
Für jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

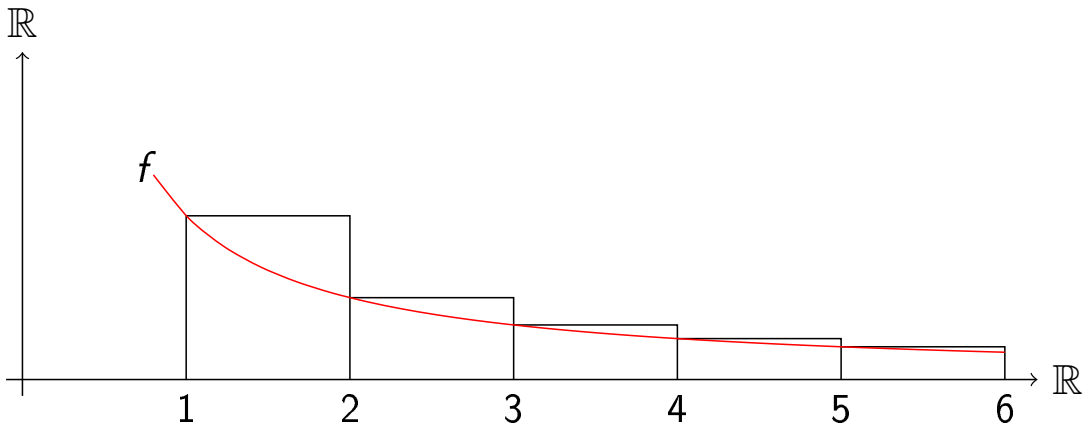
$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Daraus folgt: Gibt es eine Schranke $B > 0$ mit $|f(x)| \leq B$ für alle $x \in [a, b]$, so hat das Integral $\int_a^b f(x)dx$ höchstens den Betrag $\int_a^b Bdx = B(b - a)$. Versuchen Sie, sich diese Abschätzung geometrisch klarzumachen.

Nun noch der versprochene Beweis, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert:

Wir führen den Beweis durch einen *Integralvergleich*: Es ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n + 1),$$

was für $n \to \infty$ immer größer wird; die Werte $\ln(n + 1)$ sind unbeschränkt. □

Den Integralvergleich verstehen Sie anschaulich durch Betrachtung des Flächeninhalts unterhalb der Treppenfunktion $t : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$, $t(x) := \frac{1}{k}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq x < k + 1$ ist, mit dem Flächeninhalt unterhalb der Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$: