Vorkurs Mathematik, PD Dr. K. Halupczok,
WWU Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik 1.9.2015

Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 1, Besprechung am 3.9.2015

Aufgabe 1: Abituraufgaben in anderen Ländern.

Aufgabe 2 der Abituraufgaben Mathematik 2011 in Frankreich ("BAC"):
Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = xe^x - 1$.

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Deutsche Übersetzung: Sei f die auf $[0;+\infty[$ durch $f(x) = xe^x - 1$ definierte Funktion.

a. Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion f bei $+\infty$ und untersuchen Sie den Verlauf der Funktion f.

b. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = 0$ eine eindeutig bestimmte Lösung α im Intervall $[0,+\infty[$ besitzt. Bestimmen Sie einen Näherungswert für α, der höchstens um 10^{-2} von α entfernt liegt.

c. Bestimmen Sie das Vorzeichen von $f(x)$ als Funktion von x.

Ist diese Aufgabe schwerer oder leichter als Ihre Abi-Aufgaben? Gibt es auch vergleichbare Abschlussaufgaben in anderen Ländern? Was berichten ehemalige Austauschschüler_innen über den Mathematikunterricht in anderen Ländern? Recherchieren Sie auch im Internet.

Lösung:

Allgemeine Bemerkung: Die Aufgabe ist eine der leichteren BAC-Teilaufgaben, die ich im Web finden konnte. Viele Pflichtaufgaben behandeln z. B. die komplexen Zahlen, welche wir erst später im Vorkurs einführen werden.
Zur Lösung:
a. Für $x \geq 2$ ist $f(x) \geq \frac{x}{2} \cdot e^x$, was für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ geht, weil $x/2$ und e^x beide Funktionen sind, die gegen $+\infty$ gehen. Damit geht auch das Produkt, sowie $f(x)$, gegen $+\infty$.
b. Dass $f(x)$ für $x \geq 0$ streng monoton wächst, kann man durch die Ableitung bestimmen: Es ist $f'(x) = e^x + xe^x > 0$ für $x \geq 0$. Weil $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = e - 1 > 0$ ist, gibt es deswegen genau eine Lösung von $f(x) = 0$ im Intervall $[0,1]$ bzw. in $[0,\infty[$. Den Wert α mit $f(\alpha) = 0$ kann man mit dem Newtonschen Näherungsverfahren bestimmen: Startet man mit dem Näherungswert $x_0 = 0.5$, so ergibt sich per Taschenrechner

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{0.5 \cdot e^{0.5} - 1}{e^{0.5}(1 + 0.5)} = 0.571\ldots,$$

und ab x_2 ergibt sich der Wert $0.567\ldots$ Bis auf den Fehler 10^{-2}, d. h. auf zwei Nachkommastellen genau, hat man zum Beispiel den Näherungswert 0.56.
c. Es ist $f(x) < 0$ (Vorzeichen $-$) für $x < \alpha$, $f(\alpha) = 0$ und $f(x) > 0$ (Vorzeichen $+$) für $x > \alpha$.

Aufgabe 2: Russische Bauernmultiplikation.

Es sollen die natürlichen Zahlen $k > 1$ und ℓ multipliziert werden. Man fertige eine Tabelle an, in deren erster Zeile k (linke Spalte) und ℓ (rechte Spalte) stehen. In die nächste Zeile schreibe man in die linke Spalte $\frac{k}{2}$, falls k gerade und $\frac{k-1}{2}$, falls k ungerade ist. Unter ℓ schreibe man 2ℓ. So fahre man fort, bis in der linken Spalte 1 erreicht ist. Dann streiche man alle Zeilen, die in der linken Spalte eine gerade Zahl enthalten, und addiere alle in der rechten Spalte verbliebenen Zahlen. Das Ergebnis ist $k \cdot \ell$.
Warum funktioniert das Verfahren?

Im Beispiel:
$k = 25, \quad \ell = 17$

k	ℓ
25	17
12	~~34~~
6	~~68~~
3	136
1	272
	$425 = 25 \cdot 17.$

Allgemeine Bemerkung: Das Rechenverfahren ist eine Möglichkeit, zwei natürliche Zahlen zu multiplizieren, ohne das Einmaleins zu kennen.

Lösung:

Wir bezeichnen mit $k_0, k_1, k_2, \ldots$ die Folge der Zahlen in der linken Spalte, also $k_0 = k$, $k_1 = k/2$ für gerades k und $k_1 = (k-1)/2$ für ungerades k, dann $k_2 = k_1/2$ für gerades k_1 und $k_2 = (k_1 - 1)/2$ für ungerades k_1, usw.
Wir setzen $b_i = 0$ falls k_i gerade ist und $b_i = 1$ falls k_i ungerade ist, für $i = 0, 1, 2, \ldots$
Das Rechenverfahren berechnet dann $b_0 \cdot \ell + b_1 \cdot 2\ell + b_2 \cdot 2^2\ell + b_3 \cdot 2^3\ell + \cdots$
Nun sind die $b_0, b_1, \ldots$ gerade die Binärziffern der Dualdarstellung von k, d. h. es ist $k = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_1 \cdot 2^2 + b_3 \cdot 2^3 + \ldots$, also rechnet das Verfahren genau die Zahl $k \cdot \ell$ aus.

Es gibt noch eine einfache Lösungsmöglichkeit mit Vollständiger Induktion. Vielleicht kann Ihr Tutor/Ihre Tutorin diese Lösung Ihnen später erklären, sobald die Vollständige Induktion im Vorkurs dran war.

Aufgabe 3: Logelei.

Auf der Insel Morgenstern gibt es Werwölfe, Weswölfe, Wemwölfe und Wenwölfe, aber nicht alle haben schon mal den Dorfschulmeister besucht.

(a) Wenn es Wen- aber keine Weswölfe gibt, die den Dorfschulmeister besucht haben, dann haben alle Wemwölfe den Dorfschulmeister besucht.

(b) Wenn weder alle Wer- noch alle Wenwölfe den Dorfschulmeister besucht haben, dann gibt es unter den Weswölfen welche, die den Dorfschulmeister besucht haben und andere, die ihn nicht besucht haben.

(c) Der Dorfschulmeister hat höchstens zwei verschiedene Wolfsarten gesehen.

(d) *Genau eine* der folgenden beiden Aussagen A und B ist wahr: A. Wenn alle Weswölfe den Dorfschulmeister besucht haben, dann auch alle Werwölfe. B. Wenn alle Wenwölfe den Dorfschulmeister besucht haben, dann auch alle Wemwölfe.

Welche Wölfe haben den Dorfschulmeister besucht?

Lösung:

Die hier angegebene Lösung lässt sich sicherlich noch abkürzen oder schöner aufschreiben; wer findet die "eleganteste Lösung"?
Abkürzung: D heißt hier Dorfschulmeister.
Man führt eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: Alle Werwölfe waren beim D.
1.1. Fall: Manche Weswölfe waren beim D.
Wegen (c) waren dann weder Wem- noch Wenwölfe beim D. Dann sind die Aussagen A und B in (d) aber beide wahr. Der Fall 1.1. ist damit ausgeschlossen.

1.2. Fall: Keine Weswölfe waren beim D.
1.2.a. Wenn dann manche Wemwölfe beim D waren, dann wegen (c) keine Wenwölfe. Es sind wieder die Aussagen A und B in (d) beide wahr, also ist dies ausgeschlossen.
1.2.b. Also waren keine Wemwölfe beim D. Wegen (a) waren dann auch keine Wenwölfe beim D. Die Aussagen A und B sind dann aber wieder beide wahr, also ist auch dieser Fall ausgeschlossen.

2. Fall: Manche, nicht alle Werwölfe waren beim D.
2.1. Fall: Alle Weswölfe waren beim D. Wegen (c) waren dann weder Wem- noch Wenwölfe beim D. Dies widerspricht (b).
2.2. Fall: Manche, nicht alle Weswölfe waren beim D. Wegen (c) waren dann weder Wem- noch Wenwölfe beim D. Dann sind Aussagen A und B in (d) beide wahr, also ist Fall 2.1. ausgeschlossen.
2.3. Fall: Keine Weswölfe waren beim D. Waren Wemwölfe beim D, dann keine Wenwölfe wegen (c), und dann sind Aussagen A und B in (d) beide wahr, was ausgeschlossen ist. Also waren keine Wemwölfe beim D.
Waren nicht alle Wenwölfe beim D, sind in (d) wieder A und B beide wahr, was ausgeschlossen ist. Also waren alle Wenwölfe beim D, aber dann erhalten wir einen Widerspruch zu (a).

Es folgt:
3. Fall: Keine Werwölfe waren beim D.
3.1. Fall: Alle Weswölfe waren beim D. Wegen (b) müssen dann alle Wenwölfe beim D gewesen sein. Wegen (d), Aussage B, müssen dann auch alle Wemwölfe beim D gewesen sein, im Widerspruch zu (c).
3.2. Fall: Keine Weswölfe waren beim D. Waren manche Wenwölfe beim D, dann waren wegen (a) auch alle Wemwölfe beim D. Dann sind aber Aussagen A und B beide wahr. Also waren keine Wenwölfe beim D, und dann sind aber auch Aussagen A und B beide wahr.
3.3. Fall: Manche, nicht alle Weswölfe waren beim D. Da Aussage A wahr ist, muss B falsch sein, also sind alle Wenwölfe, aber nicht alle Wemwölfe beim D gewesen. Wegen (c) waren dann keine Wemwölfe beim D.
Es folgt die Lösung: Alle Wen, einige aber nicht alle Wes, keine Wer, Wem.

Eine weitere, kürzere Lösung von Hauke Seidel:

D heißt hier Dorfschulmeister. Wir führen eine Fallunterscheidung durch, wobei wir mit der nützlichsten Aussage (d) beginnen.

1. Fall: A ist falsch, B ist wahr. A als Implikation ist genau dann falsch, wenn die Voraussetzung wahr und die Behauptung falsch ist. Damit waren alle Weswölfe beim D. und es gab Werwölfe, die nicht beim D. waren.

Wenn alle Wenwölfe beim D. gewesen wären, müssten weil B wahr ist auch alle Wemwölfe beim D. gewesen sein. Das widerspricht (c), also gab es Wenwölfe, die nicht beim D. waren.
Damit ist die Voraussetzung von (b) erfüllt, woraus folgt, dass es Weswölfe gibt, die nicht beim D. waren. Das widerspricht der obigen Behauptung, Fall 1 ist damit ausgeschlossen.

2. Fall: A ist richtig, B ist falsch.
B als Implikation ist genau dann falsch, wenn die Voraussetzung wahr und die Behauptung falsch ist. Damit waren alle Wenwölfe beim D. und es gab Wemwölfe, die nicht beim D. waren. (*)

2.1. Fall: Wenn alle Weswölfe beim D. gewesen wären, müssten weil A wahr ist auch alle Werwölfe beim D. gewesen sein. Das widerspricht (c), also gab es Weswölfe, die nicht beim D. waren.

2.2. Fall: Kein Weswolf war beim D. Damit ist die Bedingung für (a) erfüllt, es haben also alle Wemwölfe den D. besucht. Das widerspricht der obigen Behauptung (*), dieser Fall ist also ausgeschlossen.

2.3. Fall: Es gab Weswölfe, die beim D. waren und welche, die nicht beim D. waren. Aus (c) folgt, dass keine Wer- oder Wemwölfe beim D. waren. (a) und (b) sind unter diesen Bedingungen wahr, da ihre Voraussetzungen nicht erfüllt sind.

Die Lösung ist also: Alle Wen, einige Wes, keine Wer oder Wem