# Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 3, Besprechung am 10.9.2015

Bitte das Übungsblatt möglichst ausgedruckt in die Übung mitbringen.

## Aufgabe 1: Wahrheitswerte von Aussagen mit Mengen.

Sei $U = \{1, 2, 3\}$ und $V = \{2, 4\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

| | | |
|---|---|---|
| (1) $U \subseteq V$ | (5) $\{2\} \subseteq V$ | (9) $\{2, \{2, 4\}\} \subseteq V$ |
| (2) $V \subseteq U$ | (6) $3 \in U$ | (10) $U \cap V = 3$ |
| (3) $U = V$ | (7) $2 \subseteq V$ | (11) $V \setminus U = \{4\}$ |
| (4) $U \neq V$ | (8) $\{2, 3\} \subseteq V$ | (12) $V \setminus U = \{1, 3\}$ |

**Lösung:**
(1)f (2)f (3)f (4)w (5)w (6)w (7)f (8)f (9)f (10)f (11)w (12)f (die letzte Menge ist $U \setminus V$).

## Aufgabe 2: Verständnis des Mengenbegriffs/Mengenverknüpfungen.

Ein paar Fragen zu Mengen:

(1) Warum kann die Menge $\{a, b, c\}$ weniger als 3 Elemente haben?

(2) Wieviele Elemente enthält die Menge $\{3, 4, 3\}$?

(3) Ist das eine Menge: $A := \{A\}$?

(4) Wieviele Elemente enthält folgende Menge: $\{\{6, 7, 8\}, \{3, 7\}\}$?

(5) Warum ist die Aussage $\emptyset \subseteq \emptyset$ wahr?

(6) Wieviele verschiedene Teilmengen hat die Menge $\{a, b, c\}$? Welche?

(7) Beweisen Sie folgende Aussage: $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

**Lösung:**

Antworten:

Zu (1): Wenn etwa $a = b$ ist, hat die Menge höchstens 2 Elemente.

Zu (2): 2

Zu (3): Nein, das ist Quatsch.

Zu (4): 2, nämlich $\{6, 7, 8\}$ und $\{3, 7\}$

Zu (5): $\emptyset \subseteq \emptyset$ ist wahr, denn es gilt $\forall\, x \in \emptyset : x \in \emptyset$ bzw. $\forall\, x : (x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset)$. Das ist stets wahr für alle $x$ (aus irgendeiner beliebigen Grundmenge, die man sich denken kann), da die Voraussetzung $x \in \emptyset$ nie erfüllt sein kann, d. h. stets falsch ist. Und aus Falschem folgt immer Beliebiges.

Zu (6): Die Antwort lautet 8, wenn $a, b, c$ alle paarweise verschieden sind, nämlich $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Die Antwort lautet 4, wenn die Menge aus zwei Elementen besteht, etwa o.B.d.A.[1] $\{a, b\}$, die Teilmengen sind dann $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$.

Die Antwort lautet 2, wenn $a = b = c$ ist, die Teilmengen sind dann $\emptyset$ und die einelementige Menge selbst.

Zu (7): Vor.: $A, B$ seien Mengen.
Beh.: Dann gilt $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.
Bew.: Wir zeigen die beiden Richtungen "$\Leftarrow$" und "$\Rightarrow$".
Zu "$\Leftarrow$": Ist $A = B$, so folgt $A \cup B = A \cup A = A = A \cap A = A \cap B$, also $A \cup B = A \cap B$.
Zu "$\Rightarrow$": Es ist $A \subseteq A \cup B \overset{\text{Vor.}}{=} A \cap B \subseteq B$, woraus $A \subseteq B$ folgt und analog ist $B \subseteq A$. Somit ist $A = B$. $\square$

Hier noch eine andere Lösung für "$\Rightarrow$" (es gibt sogar sehr viele Möglichkeiten, einen Beweis aufzuschreiben!): Bew.: Es gilt

$$\begin{aligned} A \cup B = A \cap B &\Rightarrow A \cup (A \cup B) = A \cup (A \cap B) \\ &\Rightarrow (A \cup A) \cup B = (A \cup A) \cap (A \cup B) \\ &\Rightarrow A \cup B = A \cap (A \cup B) \overset{\text{Nr. 8}}{=} A \Rightarrow A \cup B = A \end{aligned}$$

wobei Mengenverknüpfungsregel Nr. 8 verwendet wurde. Analog folgt aus der Voraussetzung auch $A \cup B = B$, also ist $A = A \cup B = B$. $\square$

**Aufgabe 3: Aussagen mit Quantoren.**

(a) Formulieren Sie die Negation der folgenden Aussagen.

(1) Hunde, die bellen, beißen nicht.
(2) Nachts sind alle Katzen grau.
(3) 2 ist die einzige gerade Primzahl.
(4) Jede gerade Zahl $> 2$ ist Summe zweier Primzahlen.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?
Geben Sie Beweise dafür an, d.h. beweisen Sie die Aussagen, welche wahr sind, und widerlegen Sie die Aussagen, welche falsch sind.

Formulieren Sie jeweils auch die Negation der Aussagen (1)–(4).

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, y \in \mathbb{R} :\ x < y^2$.
(2) $\exists\, y \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R} :\ x < y^2$.
(3) $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$.
(4) $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ (x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

**Lösung:**

Zu (a):

(1) Es gibt bellende Hunde, die beißen.

[1] Lassen Sie sich diese Abkürzung für "ohne Beschränkung der Allgemeinheit" von Ihrem Tutor/Ihrer Tutorin erklären! Eine andere gängige Abkürzung dafür ist o.E. für "ohne Einschränkung".

(2) Wenn Sie die Aussage (2) verstehen als "Wenn es nachts ist, gilt: Alle Katzen sind grau.", dann lautet die Verneinung: "Wenn es nachts ist gilt: Es gibt Katzen, die nicht grau sind.", was kurz auch ausgedrückt werden kann als "Es gibt Katzen, die nachts nicht grau sind."
Wenn Sie die Aussage (2) verstehen als "In allen Nächten sind alle Katzen grau.", lautet die Verneinung "Es gibt Nächte, in denen es Katzen gibt, die nicht grau sind."

(3) Es gibt (mind.) eine Primzahl außer 2, die gerade ist.
Formal: Die Aussage $\forall\, p \in \mathbb{P} : 2 \mid p \Rightarrow p = 2$ wird verneint zu $\exists\, p \in \mathbb{P} : (2 \mid p) \wedge (p \neq 2)$

(4) Es gibt (mind.) eine gerade Zahl $> 2$, die nicht die Summe zweier Primzahlen ist.
Formal: Die Aussage

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 2 \mid n,\ n > 2 : (\exists\, p, q \in \mathbb{P} : n = p + q)$$

wird verneint zu

$$\exists\, n \in \mathbb{N},\ 2 \mid n,\ n > 2 : (\forall\, p, q \in \mathbb{P} : n \neq p + q)$$

Beachten Sie hier, dass die ersten beiden Kommas hier wie "und" gelesen werden und auch durch das logische "und", d. h. $\wedge$ ersetzt können. Hiermit wird lediglich eine Einschränkung an die betrachteten $n \in \mathbb{N}$ vorgenommen, diese verändert sich durch die Verneinung nicht.

Zu (b): Wir beweisen im folgenden: Es ist (1) w, (2) f, (3) f, (4) w.

Beh.: (1) ist wahr.
Bew.: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $y := \sqrt{|x+1|} \in \mathbb{R}$ mit $y^2 = |x+1| = \max\{x+1, -x-1\} \geq x + 1 > x$. $\square$

Beh.: (2) ist falsch.
Bew.: Wir zeigen, dass die Negation von (2) richtig ist, s.u.

Beh.: (3) ist falsch.
Bew.: Bew. mit einem Gegenbeispiel: Für $x := -2 \in \mathbb{R}$ ist $x^2 = 4 > 1$ und $x < 1$. $\square$

Beh.: (4) ist wahr.
Bew.: Es genügt, z.z.: $\forall\, y \in \mathbb{R} :\ y^2 > 0 \Leftrightarrow y \neq 0$, denn mit $y = x + 1$ folgt daraus (4) wegen $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.
Zu "$\Rightarrow$": Ist $y = 0$, dann ist $y^2 = 0$ nicht positiv (das ist die Kontraposition von "$\Rightarrow$").
Zu "$\Leftarrow$": Ist $y \neq 0$, dann ist $y^2 = y \cdot y > y \cdot 0 = 0$ für $y > 0$ und ebenso $y^2 = y \cdot y > y \cdot 0 = 0$ für $y < 0$, weil sich bei der Multiplikation der Ungleichung $y < 0$ mit einer negativen Zahl das Vorzeichen umdreht. $\square$

Die Negationen lauten

$\neg(1)$: $\exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, y \in \mathbb{R} :\ x \geq y^2$.

$\neg(2)$: $\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in \mathbb{R} :\ x \geq y^2$.

$\neg(3)$: $\exists\, x \in \mathbb{R} :\ x^2 \geq 1 \wedge x < 1$.

$\neg(4)$: $\exists\, x \in \mathbb{R} :\ ((x+1)^2 > 0 \wedge x = -1) \vee ((x+1)^2 \leq 0 \wedge x \neq -1)$, wobei die Aussage äquivalent ist zu $((x+1)^2 \leq 0 \wedge x \neq -1)$.

Beweis zu $\neg$ (2): Sei $x := y^2$, dann ist $x = y^2 \geq y^2$. $\square$