Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 4, Besprechung am 15.9.2015

Aufgabe 1: Vollständige Induktion.

Zeigen Sie die folgenden Sätze mit vollständiger Induktion:

$$(a) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

$$(b) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}.$$

Lösung:

Zu (a): Induktionsanfang: $n = 1$. Dann ist

$$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1},$$

also die Behauptung wahr für $n = 1$.

Induktionsschritt von n nach $n+1$: Induktionsannahme: Sei die Behauptung wahr für eine natürliche Zahl n. Dann ist sie auch für $n+1$ richtig, weil

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&\overset{\text{Ind.vor.}}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{2(n+2) - (n+1)}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Zu (b): Induktionsanfang: $n = 1$. Dann ist

$$1 \le 2 - \frac{1}{1},$$

also die Behauptung wahr für $n = 1$.

Induktionsschritt von n nach $n+1$: Induktionsannahme: Sei die Behauptung wahr für eine natürliche Zahl n. Dann ist sie auch für $n+1$ richtig, weil

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\overset{\text{Ind.vor.}}{\le} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \\
&\leq 2 - \frac{1}{n+1},
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt die Ungleichung

$$\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \geq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n^2+n+1 \geq n(n+1) = n^2+n$$

verwendet wurde. $\square$

Aufgabe 2: Noch mehr vollständige Induktion.

Zeigen Sie:

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3n^2 > (n+1)^2$.

(b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist $3^n > n^2$.

(c) Zeigen Sie, dass für $n \geq 4$ die Ungleichung $n! > n^2$ gilt.

Lösung:

Zu (a):

$\underline{n=2:}$ $3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12 > 9 = 3^2 = (2+1)^2$.

$\underline{n \to n+1:}$ Ist die Beh. für n wahr, dann auch für $n+1$, weil

$$
\begin{aligned}
3(n+1)^2 = 3n^2 + 6n + 3 &\overset{\text{Ind.Vor.}}{>} (n+1)^2 + 6n + 3 \\
&= (n+2-1)^2 + 6n + 3 = (n+2)^2 - 2(n+2) + 1 + 6n + 3 \\
&= (n+2)^2 + 4n > (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2.
\end{aligned}
$$

$\square$

Zu (b):

$\underline{n=2:}$ $3^2 = 9 > 4 = 2^2$.

$\underline{n \to n+1:}$ Ist die Beh. für n wahr, dann auch für $n+1$, weil

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{\text{Ind.Vor.}}{>} 3n^2 \overset{(a)}{>} (n+1)^2.$$

$\square$

Zu (c):

$\underline{n=4:}$ $4! = 24 > 4^2 = 16$.

$\underline{n \to n+1:}$ Ist die Beh. für n wahr, dann auch für $n+1$, weil

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)n^2 \overset{n+1>3}{>} 3n^2 = n^2 + n^2 + n^2 \overset{n>2}{>} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

$\square$

Aufgabe 3: Formulierung eines Beweises

Sei n eine natürliche Zahl größer als 1.

Zeigen Sie: Ist $n^2 + 2$ eine Primzahl, dann ist n durch 3 teilbar.

(Hinweis: Verwenden Sie im Beweis, dass eine Zahl $n > 1$, die nicht durch 3 teilbar ist, von der Form $n = 3k + 1$ oder $n = 3k - 1$ ist mit einem $k \geq 1$.)

Lösung:

Wir geben einen Widerspruchsbeweis, ein Induktionsbeweis ist hier nicht möglich.

Bew. (durch Widerspruch): Angenommen, die natürliche Zahl $n > 1$ ist nicht durch 3 teilbar. Dann ist n von der Form $n = 3k+1$ oder $n = 3k-1$ ist mit einem $k \geq 1$, also ist $n^2 + 2 = (3k+1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 1 + 2$ oder $n^2 + 2 = (3k-1)^2 + 2 = 9k^2 - 6k + 1 + 2$, was in jedem Fall > 3 und durch 3 teilbar ist, also keine Primzahl im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $n^2 + 2$ eine Primzahl ist. $\square$

Bemerkung: Die vollständige Induktion muss nicht die beste Wahl bei Beweisen von Aussagen über natürliche Zahlen sein. Z. B. für die Aufgabenteile in Aufgabe 2 kann man sich auch auf anderem Wege direkte Beweise überlegen. Es ist auch nicht gesagt, dass die vollständige Induktion stets zum Ziel führt, wie Aufgabe 3 zeigt.