Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 5, Besprechung am 17.9.2015

Aufgabe 1: Logik der Definition eines teilerfremden Zahlenpaares.

(a) Im Skript wurde durch die Aussage

$$\forall\, c \in \mathbb{N}: \ c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c = 1$$

definiert, dass zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ *teilerfremd* sind. Wie kann man diese Aussage rein sprachlich ausdrücken? Schreiben Sie die formale Verneinung der Aussage auf und drücken Sie diese ebenfalls sprachlich aus.

Denken Sie daran, dass "$c \mid a$" und "$c \mid b$" ebenfalls Abkürzungen für Aussagen sind; diese enthalten einen Existenzquantor. Wenn man diese Aussagen dann in die Definition einsetzt, wie lautet dann die formale Verneinung und ihre sprachliche Umsetzung?

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Zahlen $n! + 1$ und $(n+1)! + 1$ teilerfremd.

Lösung:

Zu (a): Die Aussage "$\forall\, c \in \mathbb{N} : (c \mid a \wedge c \mid b) \Rightarrow c = 1$" bedeutet: "Jede natürliche Zahl c, die a und b teilt, ist (notwendigerweise) gleich 1."

Gleichwertig/äquivalent: "$\forall\, c \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \neg(c \mid a) \vee \neg(c \mid b)$, in Worten: "Jede natürliche Zahl $c \neq 1$ teilt a nicht oder b nicht."

Formale Verneinung:

$$\begin{aligned} &\exists\, c \in \mathbb{N} : \neg((c \mid a \wedge c \mid b) \Rightarrow c = 1) \\ \Leftrightarrow\ &\exists\, c \in \mathbb{N} : (c \mid a \wedge c \mid b) \wedge c \neq 1 \\ \Leftrightarrow\ &\exists\, c \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : c \mid a \wedge c \mid b, \end{aligned}$$

in Worten: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, die a und b teilt." Die Verneinung: "Es gibt keine natürliche Zahl $c \neq 1$, die a und b teilt", ist wieder gleichwertig zur Ursprungsaussage.

Wir hatten: $c \mid a \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbb{Z} : a = cd$,

entsprechend $c \mid b \Leftrightarrow \exists\, e \in \mathbb{Z} : b = ce$.

Eingesetzt: $\forall\, c \in \mathbb{N} : (\exists\, d \in \mathbb{Z} : a = cd) \wedge (\exists\, e \in \mathbb{Z} : b = ce) \Rightarrow c = 1$.

Verneinung:

$$\begin{aligned} &\exists\, c \in \mathbb{N} : (\exists\, d \in \mathbb{Z} : a = cd) \wedge (\exists\, e \in \mathbb{Z} : b = ce) \wedge (c \neq 1) \\ \Leftrightarrow\ &\exists\, c \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\ \exists\, d \in \mathbb{Z}\ \exists\, e \in \mathbb{Z} : a = cd \wedge b = ce. \end{aligned}$$

In Worten: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, eine ganze Zahl d und eine ganze Zahl e mit $a = cd$ und $b = ce$."

Auch möglich: "Es gibt eine natürliche Zahl $c \neq 1$, eine ganze Zahl d und eine ganze Zahl e, so dass die Gleichungen $a = cd$ und $b = ce$ gelten."

Zu (b): Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Zahlen $n! + 1$ und $(n + 1)! + 1$ teilerfremd, d. h. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall c \in \mathbb{N} : c \mid n! + 1 \wedge c \mid (n + 1)! + 1 \Rightarrow c = 1$

Beweis (direkt): Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{N}$ mit $c \mid n! + 1$ und $c \mid (n + 1)! + 1$. Dann gibt es $d \in \mathbb{Z}$ und $e \in \mathbb{Z}$ mit $ce = n! + 1$ und $cd = (n + 1)! + 1$. Es folgt

$$cd = (n+1)!+1 = (n+1)n!+1 = (n+1)(n!+1)-(n+1)+1 = (n+1)(n!+1)-n = (n+1)ce-n,$$

also $c(d - e(n + 1)) = n$. Somit ist c ein Teiler von n, und dann auch von $ce - n! = 1$. Dann ist auch $c = 1$, denn der einzige natürliche Teiler von 1 ist die 1. □

Aufgabe 2: Supremum, Maximum und obere Schranken.

Bestimmen Sie das Supremum und Maximum der folgenden Mengen reeller Zahlen, falls existent, und geben Sie jeweils die Menge aller oberer Schranken an:

$$A := \{e, 1\}, \qquad D := \{2n;\ n \in \mathbb{N}\},$$

$$B := \left\{2 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad E := \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\},$$

$$C := \left\{\frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad F := \{x \in \mathbb{Q};\ (x + 1)^2 = 3\}.$$

Lösung:

Bem.: Mit e ist die Eulersche Zahl $e = 2.7182818284...$ gemeint.

$\sup A = e$, $\max A = e$, Menge der o. S.: $[e, \infty)$
$\sup B = 2$, $\max B$ ex. nicht, Menge der o. S.: $[2, \infty)$
$\sup C = 1$, $\max C$ ex. nicht, Menge der o. S.: $[1, \infty)$
$\sup D$, $\max D$ ex. nicht, Menge der o. S.: $\emptyset$
$\sup E = \sqrt{2}$, $\max E$ ex. nicht, Menge der o. S.: $[\sqrt{2}, \infty)$
$F = \emptyset$, $\sup F$ und $\max F$ ex. deshalb nicht, Menge der o. S. ist $\mathbb{R}$.

Bem.: Wir haben bei der Bestimmung von F verwendet, dass $\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1$ beide irrational sind. Wäre eine der Zahlen rational, z. B. $\sqrt{3} - 1 = u/v$, so wäre auch $\sqrt{3} = 1 + u/v = (v + u)/v$ rational; aber wir wissen schon aus der Vorlesung, dass das nicht stimmt.

Bem.: Es ist $\{x \in \mathbb{R};\ \forall\, y \in F : y \leq x\} = \mathbb{R}$, denn die Bedingung $\forall\, y \in F : y \leq x$ ist immer wahr: Wird diese gelesen als $\forall\, y \in \mathbb{R} : y \in F \Rightarrow y \leq x$, so ist $y \in F$ falsch für alle $y \in \mathbb{R}$, also die Implikation insgesamt eine wahre Aussage.

Aufgabe 3: Vereinigung reeller Intervalle.

Schreiben Sie die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ als Vereinigung von Intervallen und beweisen Sie Ihre Behauptung:

$$\begin{aligned}
A &:= \{x \in \mathbb{R};\ |x| < 2\},\\
B &:= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 3\},\\
C &:= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ |2x - 3| \geq 0.5\},\\
D &:= \{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R};\ |x - 2| \leq 3\},\\
E &:= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ (x - 1)^2 \geq 2\}.
\end{aligned}$$

Lösung:

Zu A**:** Es ist $A = (-2, 2)$, da $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Zu B**:** Es ist $B = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$, denn:

$x \in B \Leftrightarrow \neg(|x| \leq 3) \Leftrightarrow \neg(-3 \leq x \leq 3) \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \vee x \in (3, \infty)$.

Zu C**:** Es ist $C = (1.25, 1.75)$, denn:

$x \in C \Leftrightarrow \neg(|2x-3| \geq 0.5) \Leftrightarrow |2x-3| < 0.5 \Leftrightarrow -0.5 < 2x-3 < 0.5 \Leftrightarrow x > 1.25 \wedge x < 1.75$.

Zu D**:** Es ist $D = [-1, 2)$, denn:

$x \in D \Leftrightarrow x^2 < 4 \wedge |x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \wedge -3 \leq x - 2 \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-2, 2) \cap [-1, 5] = [-1, 2)$.

Zu E**:** Es ist $E = (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, denn:

$x \in E \Leftrightarrow (x - 1)^2 < 2 \Leftrightarrow |x - 1| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x - 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.

Bemerkung: Ein beliebter Fehler ist es, nach dem Wurzelziehen eines Quadrats den Betrag zu vergessen. Dass $\sqrt{x^2} = |x|$ ist für alle reellen x, sollte man sich unbedingt merken.