Lösungshinweise zum Übungsblatt Nr. 6, Besprechung am 22.9.2015

Aufgabe 1: Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen.

Bestimmen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

$$\begin{array}{lllll}
a:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3\}, & a(1)=1, & a(2)=3, & a(3)=3, & a(4)=2\\
b:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}, & b(1)=1, & b(2)=3, & b(3)=3, & b(4)=2\\
c:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}, & c(1)=1, & c(2)=3, & c(3)=4, & c(4)=2\\
d:\{1,2,3,4\}\to\{1,2\}, & d(1)=1, & d(2)=1, & d(3)=2, & d(4)=1\\
e:\{1\}\to\{1,2,3,4,5\}, & e(1)=5 & & &
\end{array}$$

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(n)=2n$$
$$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ g(1)=1 \text{ und } g(n)=n-1 \text{ für } n>1$$
$$h:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ h(n)=n-1,\ \text{für gerades } n \text{ und } h(n)=n+1,\ \text{für ungerades } n$$

Lösung:

a ist surjektiv (alle Elemente der Zielmenge sind Bildwerte von a) und nicht injektiv (da $a(2)=3=a(3)$),
b ist nicht surjektiv (das Element 4 der Zielmenge ist kein Bildwert von b) und nicht injektiv (da $b(2)=3=b(3)$),
c ist bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv, denn jedes Element der Zielmenge wird genau einmal als Bildwert angenommen (kommt genau einmal als Bildwert vor)
d ist surjektiv (alle Elemente der Zielmenge sind Bildwerte von d) und nicht injektiv (da $d(1)=1=d(2)$),
e ist injektiv (keine zwei Elemente der Definitionsmenge werden auf denselben Bildwert abgebildet) und nicht surjektiv (z. B. das Element 2 der Zielmenge wird nicht angenommen).

Somit sind die Abbildungen a, b, d und e auch alle nicht bijektiv.

Die Abbildung f ist injektiv, da keine zwei verschiedenen natürlichen Zahlen n und m auf dieselbe gerade Zahl abgebildet wird (denn $f(n)=f(m)\Rightarrow 2n=2m\Rightarrow n=m$). Die Abbildung f ist nicht surjektiv, da die ungeraden Zahlen im Zielbereich nicht als Bildwerte angenommen werden.

Die Abbildung g ist nicht injektiv, da $g(2)=1=g(1)$ gilt. Sie ist aber surjektiv, da jedes $n\in\mathbb{N}$ im Zielbereich das Bild einer natürlichen Zahl, nämlich von $n+1$ ist: Es ist $g(n+1)=(n+1)-1=n$.

Die Abbildung h ist surjektiv, denn jedes $n\in\mathbb{N}$ im Zielbereich ist das Bild einer natürlichen Zahl, nämlich von $n+1$, wenn n ungerade ist, und von $n-1$, wenn n gerade ist. Formal aufgeschrieben:

$$n=\begin{cases} h(n+1), & \text{falls } n \text{ ungerade},\\ h(n-1), & \text{falls } n \text{ gerade}.\end{cases}$$

Die Abbildung h ist injektiv, denn gilt $h(n)=h(m)$ für zwei natürliche Zahlen n und m, so muss notwendig $n=m$ sein:

Aus $h(n) = h(m)$ folgt, dass n und m dieselbe Parität haben müssen (das bedeutet, dass n und m beide gerade oder beide ungerade sein sind), denn die Abbildung h wechselt die Parität: Hätten n und m verschiedene Parität, müssten auch $h(n)$ und $h(m)$ verschiedene Parität haben, aber wir haben angenommen, dass $h(n)$ und $h(m)$ gleich sind. Es bleiben die folgenden zwei Fälle zu betrachten:

Sind n und m beide gerade, so gilt $h(n) = h(m) \Rightarrow n - 1 = m - 1 \Rightarrow n = m$.

Sind n und m beide ungerade, gilt $h(n) = h(m) \Rightarrow n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m$.

Bemerkung: Wer die obige Paritätsüberlegung für h zu kompliziert findet, kann auch einfach die beiden weiteren Fälle von Hand ausschließen:

Ist n gerade und m ungerade, so gilt $h(n) = h(m) \Rightarrow n - 1 = m + 1 \Rightarrow n = m + 2$, aber dann müsste mit m auch n ungerade sein, was nicht der Fall ist.

Ist n ungerade und m gerade, so gilt $h(n) = h(m) \Rightarrow n + 1 = m - 1 \Rightarrow n = m - 2$, aber dann müsste mit m auch n gerade sein, was nicht der Fall ist.

Also ist h eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die kein Element auf sich abbildet. Finden Sie noch weitere solche Abbildungen?

Aufgabe 2: Summenzeichen, Teleskopprinzip und Indexverschiebung

(a) Berechnen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=21}^{30}((k-20)^5 - (k-20)^7)$$

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1).$$

Lösung:

Zu (a): Wir machen in der zweiten Summe eine Indexverschiebung: Setzen wir dort $m := k - 20$, so ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=21}^{30}((k-20)^5 - (k-20)^7) \\
&= \sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{m=1}^{10}(m^5 - m^7) \\
&= \sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k) + \sum_{k=1}^{10}(k^5 - k^7) \\
&= \sum_{k=1}^{10}(k^7 - k^5 + k + k^5 - k^7) \\
&= \sum_{k=1}^{10} k \overset{\text{kl. Gauß}}{=} \frac{10 \cdot 11}{2} = 55.
\end{aligned}$$

Zu (b): Beweis mit dem Teleskopprinzip:

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)\\
&= (\ln(2)-\ln(1)) + (\ln(3)-\ln(2)) + (\ln(4)-\ln(3)) + \cdots\\
&\qquad + (\ln(n)-\ln(n-1)) + (\ln(n+1)-\ln(n))\\
&= (-\ln(1)+\ln(2)) + (-\ln(2)+\ln(3)) + (-\ln(3)+\ln(4)) + \cdots\\
&\qquad + (-\ln(n)+\ln(n+1))\\
&= -\ln(1) + \underbrace{(\ln(2)-\ln(2))}_{=0} + \underbrace{(\ln(3)-\ln(3))}_{=0} + \cdots + \underbrace{(\ln(n)-\ln(n))}_{=0} + \ln(n+1)\\
&= \underbrace{-\ln(1)}_{\text{Okular}} + \underbrace{0}_{\text{Luft}} + \underbrace{\ln(n+1)}_{\text{Objektiv}} = \ln(n+1).
\end{aligned}$$

□

Beweis mit Indexverschiebung: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))\\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k).
\end{aligned}$$

In der ersten Summe führen wir mit $m = k+1$ eine Indexverschiebung durch und setzen die Rechnung fort mit

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=2}^{n+1} \ln(m) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)\\
&= -\ln(1) + \ln(n+1) + \sum_{m=1}^{n} \ln(m) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)\\
&= -\ln(1) + \ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)\\
&= -\ln(1) + \ln(n+1) = \ln(n+1).
\end{aligned}$$

□

Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Sei $n := 1$, dann ist $l.S.(1) = \ln(1+1) = r.S.(1)$.

Induktionsschritt: Sei die Aussage wahr für $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung), wir zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt: Es ist

$$l.S.(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \ln(n+1) + \ln\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big) \\
&= \ln(n+1) + \ln\Big(\frac{(n+1)+1}{n+1}\Big) \\
&= \ln(n+1) + \ln((n+1)+1) - \ln(n+1) \\
&= \ln((n+1)+1) = r.S.(n+1).
\end{aligned}
$$

$\square$

Aufgabe 3: Konvergenz reeller Folgen.

Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

$$
a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{1-n^3} & \text{für } n \in \{163, 164, \ldots, 163163\}, \\ 100 & \text{sonst,} \end{cases}
$$

$$
c_n = \Big(-\frac{5}{4}\Big)^n, \quad d_n = \Big(-\frac{4}{5}\Big)^n.
$$

Wie lautet die Menge der oberen Schranken der Mengen $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ und $D = \{d_1, d_2, d_3, \ldots\}$?

Lösung:

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, da $\frac{1}{n^2}$ Nullfolge und $(-1)^{n-1}$ beschränkt ist.
- Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 100, da die Folgenglieder für $n \geq 163164$ konstant gleich 100 bleiben.
- Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, denn es gilt:
$$\forall\, c\ \exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, n_0\ \exists\, n > n_0 : |c_n - c| \geq \varepsilon_0.$$
Bew.: Für $c \in \mathbb{R}$ wähle $\varepsilon_0 := 1$. Für n gerade und groß (mind. einem n_0) ist $(\frac{5}{4})^n \geq c + 1$, also ist $|c_n - c| = (\frac{5}{4})^n - c \geq \varepsilon_0$. $\square$
- Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0: Sei $\varepsilon > 0$, dazu $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist für alle $n \geq n_0$:
$$|d_n - 0| = \Big(\frac{4}{5}\Big)^n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon. \quad \square$$

Bem.: 1.) Die noch zu zeigende Ungleichung $(\frac{5}{4})^n \geq c+1$ ist umformbar zu $\Leftrightarrow n\ln(5/4) \geq \ln(c+1) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(c+1)}{\ln(5/4)}$. Daher gilt sie ab der kleinsten ganzen Zahl n_0, die größer gleich $\frac{\ln(c+1)}{\ln(5/4)}$ ist, d. h. für alle $n \geq n_0$.

2.) Die noch zu zeigende Ungleichung $(\frac{4}{5})^n < \frac{1}{n}$ ab einem n_0 (hier geht erst $n_0 := 11$, wie man per TR nachrechnet) lässt sich mit vollständiger Induktion beweisen: Für $n = 11$ gilt sie, und gilt diese für n, dann auch für $n+1$ wegen
$$\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} = \frac{4}{5} \cdot \Big(\frac{4}{5}\Big)^n \overset{\text{Ind.Vor.}}{<} \frac{4}{5n} \leq \frac{1}{n+1},$$
da
$$\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5} \leq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \text{ für } n \geq 4 \text{ gilt.}$$

$\square$

Die Menge der oberen Schranken von A ist $[1, \infty)$, die von B ist $[100, \infty)$, die von C ist $\emptyset$ weil $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge ist, die von D ist $[\frac{16}{25}, \infty)$.