Lösungshinweise zum letzten Übungsblatt Nr. 7, Besprechung am 24.9.2015

Aufgabe 1: Rechnen mit exp und ln.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ fest. Geben Sie (in Abhängigkeit von a, b, c) die Lösungsmenge der $x \in \mathbb{R}$ an, die die folgenden Gleichungen lösen.

(i) $a^{\ln(x^b)} = c$, (ii) $x^x = 1$, (iii) $(\ln(a))^x = b$,

(iv) $\exp(cx)^a = 2^b$, (v) $\ln\left(\dfrac{a}{e^{x-c}}\right) = b$, (vi) $x^{2\ln(a)} = 2^b$.

Lösung:

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ fest gewählt. Wir bestimmen für jede Gleichung die Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

(i) Es ist

$$a^{\ln(x^b)} = c \Leftrightarrow e^{\ln(x^b)\ln(a)} = c \Leftrightarrow e^{b\ln(a)\ln(x)} = e^{\ln(c)} \Leftrightarrow b\ln(a)\ln(x) = \ln(c)$$
$$\overset{a\neq 1}{\Leftrightarrow} \ln(x) = \frac{\ln(c)}{b\ln(a)} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{\ln(c)}{b\ln(a)}\right).$$

Für $a = 1$ ist die linke Seite in der Gleichung $b\ln(a)\ln(x) = \ln(c)$ gleich Null, die Lösbarkeit hängt dann von c ab. Es folgt:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\exp(\frac{\ln(c)}{b\ln(a)})\}, & \text{falls } a \neq 1, \\ \mathbb{R}_{>0}, & \text{falls } a = 1 \wedge c = 1, \\ \emptyset, & \text{falls } a = 1 \wedge c \neq 1. \end{cases}$$

(ii) Vorbem.: Der Ausdruck x^x ist für $x \geq 0$ definiert, denn wir haben $0^0 := 1$ definiert. Damit können wir die Aufgabe wie folgt lösen, denn man beachte, dass $\ln(x)$ nicht für $x = 0$ definiert ist: $x^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{x\ln(x)} = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$, also ist hier $\mathbb{L} = \{0, 1\}$.

(iii) Vorbem.: Der Ausdruck $(\ln(a))^x$ ist lediglich für $a > 1$ definiert. Wir bestimmen die Lösungsmenge für $a > 1$ wie folgt: Es ist $(\ln(a))^x = b \Leftrightarrow e^{x\ln(\ln(a))} = b = e^{\ln(b)} \Leftrightarrow x\ln(\ln(a)) = \ln(b)$. Die linke Seite ist gleich Null, wenn $\ln(a) = 1$, also wenn $a = e$ ist. Wieder wird eine Fallunterscheidung nötig:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\frac{\ln(b)}{\ln(\ln(a))}\}, & \text{falls } a \neq e, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } a = e \wedge b = 1, \\ \emptyset, & \text{falls } a = e \wedge b \neq 1. \end{cases}$$

(iv) $\exp(cx)^a = 2^b \Leftrightarrow \exp(acx) = \exp b\ln(2) \Leftrightarrow acx = b\ln(2) \overset{ac\neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{b\ln(2)}{ac}$. Es ist daher

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\frac{b\ln(2)}{ac}\}, & \text{falls } ac \neq 0, \\ \mathbb{R}, & \text{falls } ac = 0 \wedge b = 0, \\ \emptyset, & \text{falls } ac = 0 \wedge b \neq 0. \end{cases}$$

(v) $\ln(\frac{a}{e^{x-c}}) = b \Leftrightarrow \frac{a}{e^{x-c}} = e^b \Leftrightarrow a = e^{b+x-c} \Leftrightarrow x + b - c = \ln(a) \Leftrightarrow x = \ln(a) - b + c$. Also ist $\mathbb{L} = \{\ln(a) - b + c\}$.

(vi) $x^{2\ln(a)} = 2^b \Leftrightarrow e^{2\ln(a)\ln(x)} = e^{b\ln(2)} \Leftrightarrow 2\ln(a)\ln(x) = b\ln(2) \overset{a\neq 1}{\Leftrightarrow} \ln(x) = \frac{b\ln(2)}{2\ln(a)} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{b\ln(2)}{2\ln(a)}\right)$. Also ist

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \{\exp(\frac{b\ln(2)}{2\ln(a)})\}, & \text{falls } a \neq 1, \\ \mathbb{R}_{>0}, & \text{falls } a = 1 \wedge b = 0, \\ \emptyset, & \text{falls } a = 1 \wedge b \neq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2: Rechnen mit komplexen Zahlen.

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, wobei $i^2 = -1$. Berechnen Sie weiter das komplex Konjugierte, den Betrag, das multiplikativ Inverse sowie das Quadrat dieser komplexen Zahlen.

(i) $\dfrac{1}{1+i}$, (ii) $\dfrac{1-2i}{1+2i}$, (iii) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{2-i}{3i}$, (iv) $\left(\dfrac{1-2i}{2+i}\right)^2$, (v) $e^{2\pi i/3}$.

Lösung:

(i) $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{1-(-1)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Komplex Konjugiertes: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, Betrag: $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, Quadrat: $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{2} = -\frac{i}{2}$, multiplikatives Inverses: $1/(1/(1+i)) = 1+i$.

(ii) $\frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-4i+(-4)}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$. Komplex Konjugiertes: $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, Betrag: $\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$ bzw. $\frac{|1-2i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$, Quadrat: $\frac{1}{25}(-3-4i)^2 = \frac{1}{25}(9-16+24i) = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i$, multiplikatives Inverses: $\frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1+4i+(-4)}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. (Haben hier eine Zahl, deren komplex Konjugiertes gleich ihrem multiplikativen Inversen ist. Für welche komplexe Zahlen trifft das zu?)

(iii) $\frac{1}{i} + \frac{2-i}{3i} = \frac{i}{-1} + \frac{(2-i)i}{-3} = -i - \frac{2}{3}i - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{5}{3}i$. Komplex Konjugiertes: $-\frac{1}{3} + \frac{5}{3}i$, Betrag: $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{26}$, Quadrat: $\frac{1}{9}(1+5i)^2 = \frac{1}{9}(1+10i-25) = \frac{1}{9}(-24+10i)$, multiplikatives Inverses: $\frac{-3}{1+5i} = \frac{-3(1-5i)}{1-25} = \frac{-3+15i}{-24} = \frac{1}{8} - \frac{5}{8}i$.

(iv) $\left(\frac{1-2i}{2+i}\right)^2 = \left(\frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right)^2 = \left(\frac{2-i-4i-2}{5}\right)^2 = \frac{(-5i)^2}{5^2} = -1$. Komplex Konjugiertes: -1, Betrag: 1, Quadrat: $(-1)^2 = 1$, multiplikatives Inverses: -1.

(v) $e^{2\pi i/3} = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = \cos(\pi/2 + \pi/6) + i\sin(\pi/2 + \pi/6) = -\cos(\pi/2 - \pi/6) + i\sin(\pi/2 - \pi/6) = -\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Komplex Konjugiertes: $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, Betrag: 1, Quadrat: $e^{4\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, multiplikatives Inverses: $e^{4\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Aufgabe 3: Lösung algebraischer Gleichungen in $\mathbb{C}$

(a) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ in $\mathbb{C}$ an, indem Sie die Zerlegung $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$ verwenden. Geben Sie die drei Lösungen auch in Polarkoordinatendarstellung an.

(b) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$ an, indem Sie die Zerlegung $z^4 - 1 = (z-1)(z^3+z^2+z+1) = (z-1)(z+1)(z^2+1)$ verwenden. Geben Sie die vier Lösungen auch in Polarkoordinatendarstellung an.

(c) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^5 = 1$ in $\mathbb{C}$ an. Wie lauten die Lösungen von $z^n = 1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$?

Lösung:

Zu (a): Die Lösungen sind die Nullstellen von $z^3 - 1$, wegen der angegebenen Zerlegung sind dies $z_0 = 1$ und die beiden komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$, nämlich

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

In Polarkoordinatendarstellung ist $z_0 = 1 = e^{i\cdot 0}$, $z_1 = e^{i\cdot 2\pi/3}$ und $z_2 = e^{i\cdot 4\pi/3}$, vergleiche Aufgabe 2 (v).

Zu (b): Die Lösungen sind die Nullstellen von $z^4 - 1$, wegen der angegebenen Zerlegung sind dies $z_0 = 1$, $z_2 = -1$ und die beiden komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 1 = 0$, also $z_1 = i$ und $z_3 = -i$. In Polarkoordinatendarstellung ist $z_0 = e^{i\cdot 0}$, $z_1 = e^{i\pi/2}$, $z_2 = e^{i\pi} = e^{i\cdot 2\pi/2}$, $z_3 = e^{i\cdot 3\pi/2}$.

Zu (c): Lösungen von $z^n - 1 = 0$ sind die Zahlen $z_k = e^{i\cdot 2k\pi/n}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$, denn nach der Moivreschen Formel ist $z_k^n = (e^{i\cdot 2k\pi/n})^n = e^{in\cdot 2k\pi/n} = e^{2k\pi i} = (e^{2\pi i})^k = 1^k = 1$. Und ist $z = e^{i\phi}$ eine Lösung (welche wegen $|z|^n = |z^n| = 1 \Rightarrow |z| = 1$ den Betrag 1 haben muss), so ist wegen $e^{2\pi i\ell} = 1 = z^n = e^{i\phi n}$ dann $\phi = 2\ell\pi/n$ für ein $\ell \in \mathbb{Z}$; wegen der 2π-Periodizität ist dann z eine der angegebenen n Lösungen (weil bei der Division von ℓ durch n ein Rest k entsteht für den $e^{2i\ell\pi/n} = e^{2ik\pi/n} = z_k$ gilt), also kann es nicht mehr Lösungen geben als die n vielen angegebenen.

Man nennt die Lösungen von $z^n = 1$ die <u>n-ten Einheitswurzeln</u>. Machen Sie sich ihre Lage in der komplexen Ebene anschaulich klar.

Die fünf Lösungen von $z^5 = 1$ sind also $z_0 = 1$, $z_1 = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$, $z_2 = \cos(4\pi/5) + i\sin(4\pi/5)$, $z_3 = \cos(6\pi/5) + i\sin(6\pi/5)$ und $z_4 = \cos(8\pi/5) + i\sin(8\pi/5)$. Die Zerlegung $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ hätte hier nicht weiter geholfen, weil $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ nicht weiter zerlegbar ist.

Mit etwas mehr Arbeit kann man zeigen, dass $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ und $\sin(2\pi/5) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$ ist (vgl. Wikipedia "Einheitswurzel") und deswegen die 5-ten Einheitswurzeln immerhin noch mit Quadratwurzeltermen beschreibbar sind. Für die 7-ten Einheitswurzeln z. B. ist das schon nicht mehr möglich, wie man üblicherweise in Algebra zeigt.

Aufgabe 4*: Stetigkeit einer Funktion

Die Stetigkeit einer Funktion f kann man einerseits mit dem ε-δ-Kriterium und andererseits mit dem Folgenkriterium (s. Vorlesung VK7) definieren, beide Aussagen sind äquivalent.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$. Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass f in 0 stetig ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums, dass f in 1 stetig ist.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$. Zeigen Sie sowohl mit Hilfe des $\varepsilon - \delta$- als auch mit dem Folgenkriterium, dass f in 0 nicht stetig fortsetzbar ist (d. h., man kann $f(0)$ definieren, wie man will, f ist in 0 nicht stetig).

Lösung:

(a) Beh.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ ist stetig in $c = 0$.

Bew. ($\varepsilon - \delta$-Kriterium): Z.z.: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} : |x| < \delta \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$.

Die zu erfüllende Ungleichung ist äquivalent zu $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ und ist für $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$ erfüllt.

(b) Beh.: $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ ist stetig in $c = 1$.

Bew. (Folgenkriterium): Z.z.: $\forall\, x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 : \frac{1}{x_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen 1 konvergiert. Dann konvergiert $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{1} = 1$ (nach Grenzwertregel Nr. 3 der Vorlesung). $\square$

(c) Beh.: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ ist nicht stetig fortsetzbar in $x = 0$.

Bew.:

$\varepsilon - \delta$-**Krit.:** Z.z.: $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |x| < \delta \wedge |\frac{1}{x} - a| \geq \varepsilon_0$.

Zu $a \in \mathbb{R}$ setze $\varepsilon_0 := 1$. Sei $\delta > 0$. Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\delta} < n_1$ und $n_2 \geq |a| + \varepsilon_0$. Dann setze $n := \max\{n_1, n_2\}$ und $x := \frac{1}{n}$. Es folgt $|x| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1} < \delta$ und $|\frac{1}{x} - a| = |n - a| \geq n - |a| \geq n_2 - |a| \geq |a| + \varepsilon_0 - |a| = \varepsilon_0$. $\square$

Folgenkrit.: Z.z.: $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists$ Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $x_n \neq 0$, mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq a$, d. h. (dieser Grenzwert existiert nicht) oder (er existiert und ist $\neq a$).

Wähle $x_n := \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, dann ist $f(x_n) = n$ divergent. $\square$