▸ Quantoren

- Allquantor $\forall$: $(\forall x \in M : A(x)) :\Leftrightarrow$ Für alle $x \in M$ gilt $A(x)$.
- Existenzquantor $\exists$: $(\exists x \in M : A(x)) :\Leftrightarrow$ Es gibt (mindestens) ein $x \in M$, für das $A(x)$ gilt.

▸ Umgang mit Quantoren:

- $\forall, \exists$ nicht beliebig vertauschbar!

Bsp.: $T = \{\text{Töpfe}\}$, $D = \{\text{Deckel}\}$,
$P(d,t)$ = "Auf den Topf $t \in T$ passt der Deckel $d \in D$".

$\forall t \in T \; \exists d \in D : P(d,t)$, "Auf jeden Topf passt ein Deckel."

$\exists d \in D \; \forall t \in T : P(d,t)$, "Es gibt einen Deckel, der passt auf jeden Topf."

- Verneinung von Aussagen mit Quantoren:
  1.) $\neg(\exists x \in M : E(x)) :\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg E(x)$
  2.) $\neg(\forall x \in M : E(x)) :\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg E(x)$

Bsp.: $\neg\left(\forall t \in T \left(\exists d \in D : P(d,t)\right)\right)$

$\Leftrightarrow \quad \exists t \in T : \neg(\exists d \in D : P(d,t))$

$\Leftrightarrow \quad \exists t \in T \; \forall d \in D : \neg P(d,t)$

"Es gibt einen Topf, auf den kein Deckel passt."

▶ Beweise von Sätzen mit Quantoren:

1. Satz: $\exists x \in M : E(x)$ $\rightsquigarrow$ Konstruktion/explizite Angabe eines $x \in M$, für das $E(x)$ bewiesen werden kann.

2. Satz: $\forall x \in M : E(x)$ $\rightsquigarrow$ Nachweis von $E(x)$ für jedes beliebige $x \in M$ (beliebig, aber fest)
Bem.: bei $x \in M = A \cup B$ auch durch Fallunterscheidung: erst $x \in A$, dann $x \in B$.

3. Satz: $\neg(\underbrace{\forall x \in M : E(x)})$ $\rightsquigarrow$ zeige: $\exists x \in M : \neg E(x)$
(Konstruktion eines Gegenbeispiels zu $E(x)$.)

4. Satz: $\neg(\underbrace{\exists x \in M : E(x)})$ $\rightsquigarrow$ zeige: $\forall x \in M : \neg E(x)$
(d.h. zeigen, dass $E(x)$ "nie" gilt).

Bsp.: zu 1.: Satz: $\exists k \in \mathbb{N} : 2^{2^k} + 1$ keine Primzahl.

Bew.: Sei $k = 5$, dann ist $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$ keine Primzahl. $\square$

zu 3: Satz: $\neg\,(\underbrace{\forall k \in \mathbb{N} : 2^{2^k} + 1 \text{ ist Primzahl}}_{\text{Vermutung von Fermat}})$, Bew. wie eben.

zu 2.: Satz: $\forall k \leq 4 : 2^{2^k} + 1$ ist Primzahl.
Bew.: $2^{2^1} + 1 = 5$ ist PZ, $2^{2^2} + 1 = 17$ ist PZ,
$2^{2^3} + 1 = 257$ ist PZ, $2^{2^4} + 1 = 65537$ ist PZ. $\square$

zu 4.: Satz: $\neg\,(\exists k \leq 4 : 2^{2^k} + 1$ ist keine Primzahl$)$, Bew. wie eben.

Beispiel für Beweis mit Fallunterscheidung:

Satz: Die einzigen Primzahlen der Form $p = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind $p = 2$ (für $n = 2$) und $p = 5$ (für $n = 3$).

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \text{ Primzahl} \Rightarrow n = 2 \vee n = 3 \right)$.

Bew.: $\mathbb{N} = \underbrace{\{2m;\ m \in \mathbb{N}\}}_{\text{geraden}} \cup \underbrace{\{2m+1;\ m \in \mathbb{N}_0\}}_{\text{ungeraden}}$

1. Fall: n ungerade, etwa $n = 2m+1$ mit $m \in \mathbb{N}_0$.
Dann ist

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 = (2m+1)(m+1) - 1 = 2m^2 + 3m = m(2m+3)$$

nach Vor. eine Primzahl, also ist $m = 1 \vee 2m+3 = 1$

also ist $n = 3 \vee \underbrace{2m = -2}_{f}$, also $n = 3$.

2. Fall: n gerade, etwa $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$.
Dann ist

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 = m(2m+1) - 1 = 2m^2 + m - 1 = (m+1)(2m-1)$$

nach Vor. eine Primzahl, also ist $m+1 = 1 \vee 2m-1 = 1$,

also ist $f \vee m = 1$, also $n = 2$. $\square$