# Zahlbereiche: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

**$\mathbb{N}$:** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

Peano-Axiome beschreiben $\mathbb{N}$.

5. Axiom:

$$\forall \underbrace{E(x)}_{\text{bel. Aussage über Zahl } x} : \left(E(1) \wedge \underbrace{\forall n \in \mathbb{N} : E(n) \Rightarrow E(n+1)}\right) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : E(n)$$

Somit: $\underbrace{E(1)}_{\text{wg. (1)}} \Rightarrow \underbrace{E(2)}_{\text{wg. (2)}} \Rightarrow \underbrace{E(3)}_{\text{wg. (2)}} \Rightarrow \underbrace{E(4)}_{\text{wg. (2)}} \Rightarrow \dots$

Anwendung des Satzes von der vollst. Ind. liefert Beweismethode für Satz der Art "$\forall n \in \mathbb{N} : E(n)$"

Das 5. Axiom als Satz formuliert:

**Satz (von der vollständige Induktion):**

Vor.: Sei $E$ eine Aussage über nat. Zahlen wie folgt:

(1) Die Aussage gilt für die nat. Zahl 1, d.h. $E(1)$ wahr.

(2) Gilt die Aussage $E$ für die nat. Zahl $n$, dann auch für $n+1$, d.h. $E(n) \Rightarrow E(n+1)$.

Beh.: $E$ gilt für alle natürlichen Zahlen.

## Aufschreiben eines Beweises mit vollständiger Induktion:

1. Formulierung eines Beweises von $E(1)$ als "Induktionsanfang: $n = 1$ ..."
2. Formulierung eines Beweis von $E(n) \Rightarrow E(n+1)$ als "Induktionsschritt: $n \rightsquigarrow n+1$ ..."
   2a) d.h. unter der Voraussetzung/Annahme, dass $E(n)$ gelte ("Induktionsvoraussetzung/annahme")
   2b) wird die Behauptung $E(n+1)$ hergeleitet/bewiesen ("Dann gilt auch $E(n+1)$, weil ...")
3. Feststellung, dass der Beweis zuende. "Also gilt $E(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$".

**Bsp.:** **Satz:** Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2.$$

**Beweis (durch vollständige Induktion):**

**Induktionsanfang:** Sei $n=1$, dann ist $1 = 1^2$ richtig. ✓

**Induktionsschritt:**

Induktionsvor.: Sei die Formel wahr für ein $n \in \mathbb{N}$,

d.h. $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$.

Dann gilt die Formel auch für $n+1$, weil

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{=n^2 \text{ nach Ind.vor.}} + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + 2n + 1 \underset{\text{bin.Formel}}{=} (n+1)^2. \qquad \square$$

**Kürzer:**
- $n=1$: $\text{l.S.} = 1 = 1^2 = \text{r.S.}$ ✓
- $n \rightsquigarrow n+1$: $\text{l.S.}(n+1) = 1+3+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1)$

$$\underset{\text{Ind.vor.}}{=} n^2 + 2n + 1 \underset{\text{bin.F.}}{=} (n+1)^2. \qquad \square$$

**Bsp.:** **Satz (vom kleinen Gauß):**

$$1+2+3+\ldots+98+99+100$$

$\to 101$

$\to 101$

$\to 101$

$\rightsquigarrow 50 \cdot 101 = 5050$

Für alle natürlichen $n \in \mathbb{N}$ ist $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis (durch vollständige Induktion):

Induktionsanfang: Sei $n=1$, dann $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ ✓.

Induktionsschritt:

Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$,

dann gilt die Formel auch für $n+1$,

denn $\text{l.S.}(n+1) = 1+2+\ldots+n+(n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= (n+1)\cdot\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2} = \text{r.S.}(n+1).$$

$\square$

Kurz: $n=1$: $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ ✓

$n \to n+1$: $1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \text{r.S.}(n+1). \qquad \square$$