Wdh.: Vollst. Ind.: $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}: E(n)}}$

$\uparrow$

Ind.anf.: $n=1$: $\underline{\underline{E(1)}}$ ✓

Ind.schritt: $n \rightsquigarrow n+1$: $\underline{\underbrace{E(n)}_{\text{Ind.vor./ Ind.ann.}} \Rightarrow \underbrace{E(n+1)}_{\text{Ind. beh.}}}$

Bsp.: Satz: Vor.: $a, b \in \mathbb{Z}$

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: \; a-b \mid a^n - b^n$

Bew. (Vollst. Ind.): $\underline{n=1:}$ l.S. $= a-b \mid a^1 - b^1 =$ r.S. ✓

$\underline{n \rightsquigarrow n+1:}$ Es gelte $a-b \mid a^n - b^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$,

etwa $a^n - b^n = c \cdot (a-b)$ für ein $c \in \mathbb{Z}$.

Dann folgt

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= a^n \cdot a - b^n \cdot a + b^n a - b^n \cdot b \\ &= a \underbrace{(a^n - b^n)}_{= c \cdot (a-b) \text{ laut } \underline{\underline{\text{Ind.vor.}}}} + (a-b) \cdot b^n \\ &= (a-b) \cdot (ac + b^n), \end{aligned}$$

also ist dies ein Vielfaches von $a-b$. $\square$

$\underline{\underline{\mathbb{N}}}$: Peano-Axiome $\rightsquigarrow \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Erklärung von $+, \cdot$ $\rightsquigarrow$ Rechenregeln

$\rightsquigarrow$ Erklärung von 0 durch $n + 0 = 0 + n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\rightsquigarrow$ Erklärung von $\leq$ bzw. $<$:

$n \leq m :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : n + k = m$

$\rightsquigarrow$ Darstellung natürlicher Zahlen: • (endl.) Ziffernfolgen im 10er-System

• Angabe der Zerlegung in Primfaktoren

$\underline{\underline{\mathbb{Z}}}$: • Erkläre $n-m$ als die Zahl k mit $\underline{m+k=n}$
(eindeutig $k \in \mathbb{N}_0$, falls $m \leq n$)
• Def.: $-m := 0-m$
$\rightsquigarrow \mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}$ Menge der ganzen Zahlen

Dann ist $n-m := n+(-m)$ die Zahl k mit $m+k=n$,
da $m+(n+(-m)) = n+((-m)+m) = n+0 = n$

Also: $\forall m,n \in \mathbb{Z}\ \exists k \in \mathbb{Z} : m+k=n$

$\hookrightarrow$ insb.: $m + \underbrace{(-m)}_{\text{Inverses von } m} = 0$

$\underline{\underline{\mathbb{Q}}}$: • Erkläre n/m für $m \neq 0$ als die Zahl k mit $m \cdot k = n$
(eind. $k \in \mathbb{Z}$, falls $m \mid n$)

• $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m};\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ Menge der rationalen Zahlen

$\rightsquigarrow$ Problem: Darstellung $\frac{n}{m}$ ist nicht eind.: $\frac{n}{m} = \frac{n \cdot k}{m \cdot k}$

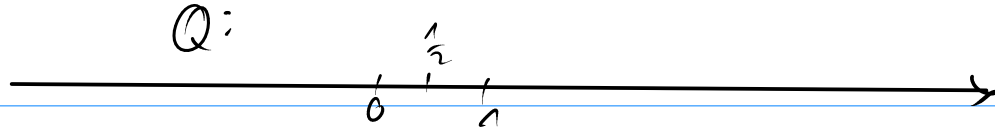
Def.: • $\frac{n}{m} = \frac{u}{v} \;:\Leftrightarrow\; nv = um$

• $\frac{n}{m}$ heißt $\underline{\text{gekürzt}}$, falls $\forall k \in \mathbb{N} : k \mid m \wedge k \mid n \Rightarrow k=1$

<u>Satz</u>: Die Darstellung einer rationalen Zahl $r \in \mathbb{Q}$ ist stets als gekürzter Bruch möglich. Diese ist eindeutig.

$\rightsquigarrow$ $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ bildet <u>Körper</u>, es gibt auch Körper mit 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, ... El.

$\mathbb{Q}$:



→ Erklärung von $\leq$ auf $\mathbb{Q}$:

$$\frac{2}{5} < \frac{4}{7}$$

$$0.4 < 0.571\ldots$$

$$\frac{a}{b} \leq \frac{u}{v} :\Leftrightarrow av \leq ub$$

→ Größenvergleiche leichter, wenn rationale Zahlen als Dezimalbrüche geg. sind.

→ Dezimalbruch: $\pm \underbrace{a_k a_{k-1} \cdots a_0}_{\text{Vorkommastellen}}, \underbrace{b_0 b_1 b_2 \ldots}_{\text{Nachkommastellen}}$

- Dezimalbrüche rationaler Zahlen brechen ab oder sind periodisch
- Dezimalbruchdarst. sind nicht eind.:

$$0{,}9999\ldots = 1{,}00\ldots$$

→ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$: • Auflösen von Gleichungen wie $x^2 = 2$ nach x problematisch in $\mathbb{Q}$!

Satz: Die Glg. $x^2 = 2$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$. (D.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Bew.: Angenommen, $x \in \mathbb{Q}$ sei Lösung der Glg. $x^2 = 2$.
Sei $x = \frac{a}{b}$ die gekürzte Darstellung mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Dann $2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2}$, also $2b^2 = a^2$.

Also ist $2 \mid a$, etwa $a = 2n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Aus $2b^2 = a^2 = 4n^2$ folgt $b^2 = 2n^2$, also $2 \mid b$, was mit $2 \mid a$ ein Widerspruch dazu ist, dass $\frac{a}{b}$ gekürzt ist. $\square$

• Annäherung an $\sqrt{2}$: $1;\ 1.4;\ 1.41;\ 1.414;\ldots$

Konstruktive $\rightsquigarrow$ Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ durch "alle Wurzeln"?

$\downarrow$

Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$
- a) Zulassung unendlich langer, nichtperiodischer Dezimalbrüche
- b) Erweiterung mit Cauchyfolgen
- c) Dedekindsche Schnitt

Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$:

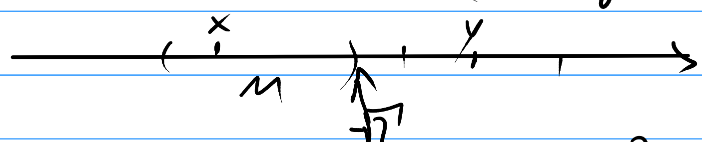
Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke $z \in \mathbb{R}$.

D.h.:

$$\forall M \subseteq \mathbb{R},\ M \neq \emptyset,\ \underbrace{(\exists y \in \mathbb{R}: \forall x \in M: x \leq y)}_{\exists y:\ y \text{ ist o.S.}}:$$

$$\exists z \in \mathbb{R},\ z \text{ ist o.S.}: \underbrace{(\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M: z - \varepsilon < x)}_{\text{jede kleinere Zahl } z-\varepsilon \text{ als } z \text{ ist nicht o.S.}}$$

$(\Leftrightarrow)$ es gilt keine kleinere o.S. als z



Bsp.: • $M := \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{Q}$ ist nach oben beschränkt, und hat kein Maximum

z.B. ist $3 \in \mathbb{Q}$ eine o.S. von M, da $\forall x \in M: x \leq 3$

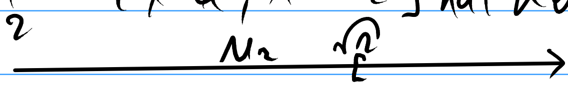
$\ulcorner x^2 \leq 2 \Rightarrow x \leq 3$, denn: $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9 > 2 \lrcorner$

$\sqrt{2}$ sei die kleinste o.S. von M in $\mathbb{R}$ laut Vollst.axiom!

$\rightsquigarrow \sqrt{2} := \sup M \in \mathbb{R}$ (Supremum = kleinste o.S.)

~~$\sqrt{2} = \max M$ in $\mathbb{R}$, $\max M$ in $\mathbb{Q}$ ex. nicht~~

• $M_2 := \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$ hat kein Maximum ~~in $\mathbb{Q}$, auch nicht in $\mathbb{R}$~~



K Menge mit Ordnungsrelation $\leq$, z.B. $K = \mathbb{R}$

- $M \subseteq K$ heißt <u>nach oben beschränkt</u>, wenn M eine o.S. $y \in K$ hat

- $y \in K$ heißt <u>o.S.</u> (obere Schranke) von $M \subseteq K$, falls $\forall x \in M: x \leq y$

- $z \in K$ heißt <u>kleinste o.S.</u> / <u>Supremum</u> von $M \subseteq K$,

  falls $z \in K$ eine o.S. von $M \subseteq K$ ist

  und $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in M: z - \varepsilon < x$

  $(\Leftrightarrow \; \forall y < z \; \exists x \in M: y < x$

  $\Leftrightarrow \; \neg (\exists y < z \; \underbrace{\forall x \in M: x \leq y}_{y \text{ ist o.S. von } M \subseteq K})$

- $x \in M$ heißt <u>Maximum</u> von M, falls $\forall y \in M: x \leq y \Rightarrow x = y$

  (bzw. $\forall y \in M: y \leq x$)

<u>Def.:</u> Sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dann heißt

$a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}}$ die <u>n-te Potenz</u>, $a^0 := 1$,

weiter def. $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$.

- a^m mit $m \in \mathbb{Z}$ heißt m-te Potenz, a heißt <u>Basis</u>, m heißt <u>Exponent</u>.

- Sei $x = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$,

def. $a^x = a^{\frac{m}{k}} := y$ mit $y^k = a^m$, <u>falls existiert.</u>

Def.: $\sqrt[k]{a^m} := a^{\frac{m}{k}}$