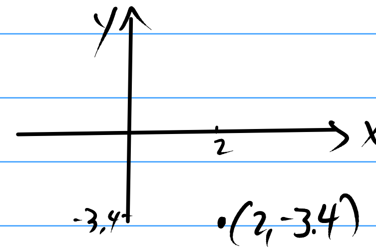
Def.: Sei A, B Mengen.
Produktmenge: $A\times B := \{\overset{\text{geordnetes Paar}}{(x,y)};\ x\in A, y\in B\}$
heißt Produkt von A und B

Bsp.: $A=B=\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} := \{(x,y);\ x,y\in\mathbb{R}\}$,

z.B. $(2,-3.4)$
$\neq (-3.4, 2)$
aber $\{2,-3.4\} = \{-3.4, 2\}$



Sind $A_1,\dots,A_n$ Mengen,
so kann man $A_1\times A_2\times\dots\times A_n$ bilden:

$$A_1\times A_2\times\dots\times A_n := \{\underbrace{(x_1,x_2,\dots,x_n)}_{n\text{-Tupel}};\ x_1\in A_1\wedge\dots\wedge x_n\in A_n\}$$

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$$

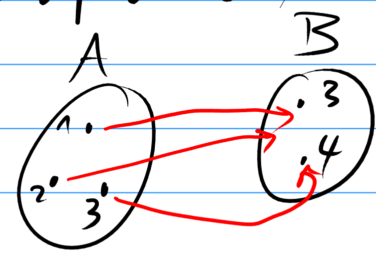
Def.: Seien A, B Mengen. Eine Abbildung von A nach B
ist $f\subseteq A\times B$ mit: $\forall x\in A\ \underset{\text{es ex. genau ein}}{\exists!}\ y\in B:\ \underbrace{(x,y)\in f}_{y=f(x)}$

Schreiben: $y=f(x)$ für $(x,y)\in f$

und $f: \underset{\text{Definitionsbereich}}{A} \to \underset{\text{Bildbereich/Wertebereich}}{B}$, $x\mapsto f(x)$ ($f(x)$ heißt Bild/Wert von x unter der Abb. f)

Bsp.: • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$, d.h. $f(x) = x^2$
ist Abb. von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (Standardparabel)

• $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$,
$f: A \to B,\ 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 4$
(ist surjektiv)



• $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 2x + y$
z.B. $(-1, 3) \mapsto -2 + 3 = 1$, d.h.

$$\underbrace{f((-1,3))}_{\text{schreiben auch } f(-1,3)} = 1$$

(wenn klar ist, was gemeint ist)

Def.: Eine Abbildung $f: A \to B$ heißt

• injektiv, falls es zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$

• surjektiv, falls es zu jedem $y \in B$ mindestens ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$

• bijektiv, falls es zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$

Bsp.: • $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist injektiv
(denn y hat höchst. ein Urbild x mit $x^2 = y$)

• $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = x^2$ ist surjektiv
(denn $y \geq 0$ hat mind. ein Urbild x mit $x^2 = y$)

• $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = x^2$ ist bijektiv (....)

Ist $f: A \to B$ bijektiv, kann $g: B \to A$ def. werden

durch $\forall x \in A: g(f(x)) = x$. (Bzw. $\forall y \in B: f(g(y)) = y$)

Diese Abb. g heißt Umkehrabbildung von f.

Bsp.: $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ hat Umkehrabb. $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

Bem.:
- Es ex. Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, deswegen ist $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich.
- Es ex. keine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, deswegen ist $\mathbb{R}$ überabzählbar unendlich.