Wdh.:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge

$\rightsquigarrow s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

i ← Hilfszahl heißt Index

Die Summenfolge ist $s_1 = a_1$, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$

Eine Summenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$

heißt auch Reihe, ihre Folgenglieder auch Partialsummen.

Bsp.: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Bsp.: Geometrische Summenformel:

Beh.: Für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ ist $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Bsp.: $x = 2 \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{n} 2^i = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

$$x = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= 2 \cdot \Big(1 - \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

$\rightsquigarrow$ Schreibe: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$.

Bew.: z.z.: $(x-1)\sum_{i=0}^{n} x^i \overset{!}{=} x^{n+1}-1$ für $x \neq 1$.

Haben

l.S. $$(x-1)\sum_{i=0}^{n} x^i = x\sum_{i=0}^{n} x^i - \sum_{i=0}^{n} x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} x^i$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} x^i - \sum_{i=0}^{n} x^i$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(Glas)}}}{x^{n+1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{i=1}^{n} x^i}_{=0 \text{ (Luft)}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(Glas)}}}{x^0} \quad \leftarrow \text{„Teleskopsumme"}$$

$$= x^{n+1} - 1 = \text{r.S.} \qquad \square$$

Grenzwerttheorie von Folgen

Def.: Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Konvergiert, wenn sie einen Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ hat.
Eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \underbrace{|a_n - c|}_{\text{Abstand von } a_n \text{ zu } c} < \varepsilon.$$

Eine Folge, die nicht Konvergiert, heißt divergent.

Eine Folge mit Grenzwert $c = 0$ heißt Nullfolge.

Bsp.: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ist Nullfolge, denn:

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ wird "immer kleiner":

$$< 2 \text{ für } n \geq 1$$
$$< 1 \text{ für } n \geq 2$$
$$< \frac{1}{2} \text{ für } n \geq 3$$
$$< 0.4 \text{ für } \underbrace{n \geq 3}_{n > \frac{1}{0.4} = 2.5} \rightsquigarrow n_0(0.4) = 3$$
$$< \varepsilon \text{ für } \underbrace{n \geq n_0(\varepsilon)}_{n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. Dazu sei $n_0(\varepsilon) := \min\{n_0 \in \mathbb{N};\ n_0 > \frac{1}{\varepsilon}\}$.

Sei $n \geq n_0(\varepsilon)$, dann ist $n \geq n_0(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$,

also $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. $\square$

Bsp.: $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1,

d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$: $\left|\frac{n+1}{n+3} - 1\right| < \varepsilon$.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$, dann setze
$n_0(\varepsilon) := \min\{n_0 \in \mathbb{N};\ n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 3\}$.
Sei $n \geq n_0(\varepsilon)$, dann ist
$n \geq n_0(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon} - 3$, also

$$\left|\frac{n+1}{n+3} - 1\right| \overset{\text{NR}}{=} \frac{2}{n+3} < \varepsilon \text{ da } n > \frac{2}{\varepsilon} - 3.$$
$\square$

NR: $= \left|\frac{n+1-n-3}{n+3}\right| = \left|\frac{-2}{n+3}\right| = \frac{2}{n+3} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow (n+3)\cdot\varepsilon > 2$

$\Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 3$

Notation: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} c$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

bei Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit GW c.

$$\underbrace{\frac{n+1}{n+3} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1+0}{1+0}}_{\text{laut Grenzwertsatz}} = 1$$

($\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{3}{n} \to 0$)

Notation: Wenn eine Reihe $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert,

schreibt man $\underbrace{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i}_{\in\mathbb{R}}$ für ihren Grenzwert.

Gelegentlich: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ kann auch die Reihe bedeuten.

Bsp.: $\underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$ ist eine divergente Reihe.

$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ \ldots$

Diese Reihe heißt <u>harmonische Reihe</u>.

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ heißt <u>Potenzreihe</u>

<u>Def.</u>: $\exp: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\exp(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ heißt <u>Exponentialfunktion</u>.

Bsp.: $\exp(0) = \frac{\overbrace{0^0}^{=1}}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \ldots = 1$,

$e := \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \ldots \approx 2.718\ldots$

heißt <u>Eulersche Zahl</u> $\left(e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)$.

<u>Funktionalgleichung:</u> $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow \exp(2x) = \exp^2(x), \quad \exp(3x) = \exp(x+2x) = \exp^3(x), \ldots$

$\rightsquigarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{Q}: \exp(xy) = (\exp(x))^y = \exp^y(x)$

$\rightsquigarrow \exp(y) = \exp(1 \cdot y) = (\exp(1))^y = e^y$

<u>Def.:</u> Für $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ setze $e^y := \exp(y)$.

Dann: $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x \quad \rightsquigarrow$ Potenzgesetze

Bem.: $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv.

<u>Def.:</u> Die Umkehrfunktion von $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist

die <u>natürliche Logarithmusfunktion</u> $\ln: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$,

d.h. $\ln$ ist erklärt $\forall x \in \mathbb{R}: \ln(\exp(x)) = x$.

$\ulcorner \forall y > 0: \exp(\ln(y)) = y$ bzw. $\forall x, y \in \mathbb{R}: y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x. \lrcorner$

Problem: Berechne a^x für $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$:

Haben: $\underline{\underline{e^{x \ln a}}} \underset{\uparrow}{=} (e^{\ln a})^x = a^x$.

Potenzgesetz für exp

$\ulcorner \exp(x \ln a) = (\exp(\ln a))^x = a^x \lrcorner$

Bsp.: $\cdot\ 2^x = e \iff x = \log_2(e) = \frac{\ln(e)}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}$

$\cdot$ Basisumwandlung: $\boxed{\log_a(c) = \widetilde{\log_a(b)} \cdot \log_b(c)}$,

denn: $\frac{\ln(c)}{\ln(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \cdot \frac{\ln(c)}{\ln(b)}$ ✓

<u>Die Komplexen Zahlen</u> sind eine Erweiterung von $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

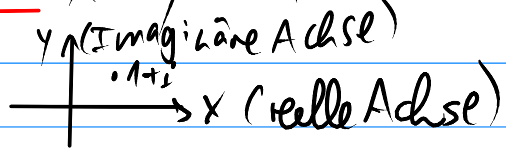
$\cdot$ Konstruktion: $\mathbb{C} = \widetilde{\mathbb{R}^2}$ mit der "richtigen" Def. für $+, \cdot$

$= \{(x,y);\ x,y \in \mathbb{R}\} \rightsquigarrow$ Schreiben $x + iy$ für $(x,y) \in \mathbb{C}$,

<u>Def.:</u> x heißt <u>Realteil</u> und y heißt <u>Imaginärteil</u>

der <u>komplexen Zahl</u> $x + iy \in \mathbb{C}$.

Anschaulich: <u>Komplexe Ebene</u> $\mathbb{C}$:



Def. $+$: Komponentenweise, d.h.

$$(x+iy)+(u+iv):=(x+u)+i(y+v)$$

Def. $\cdot$: $(x+iy)\cdot(u+iv):=(xu-yv)+i(yu+xv)$

Bsp.: $(-1+2i)\cdot(3+5i)=(-3-10)+i(-5+6)=-13+i$

Für $\underline{\underline{i}}=0+1\cdot i$ gilt:

$$i^2=(0+1\cdot i)\cdot(0+1\cdot i)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+i(0\cdot 1+1\cdot 0)=\underline{\underline{-1}}$$

$\rightsquigarrow$ in $\mathbb{C}$ hat $x^2=-1$ die Lösungen $i, -i$

$\rightsquigarrow$ $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist Körper.