$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist Körper der <u>komplexen Zahlen</u>

$$\mathbb{C} = \{x+iy;\ x,y \in \mathbb{R}\}$$

Die imaginäre Einheit i hat die Eigenschaft $\underline{\underline{i^2 = -1}}$.

$$(x+iy)\cdot(u+iv) := (xu - yv) + i(xv + yu)$$

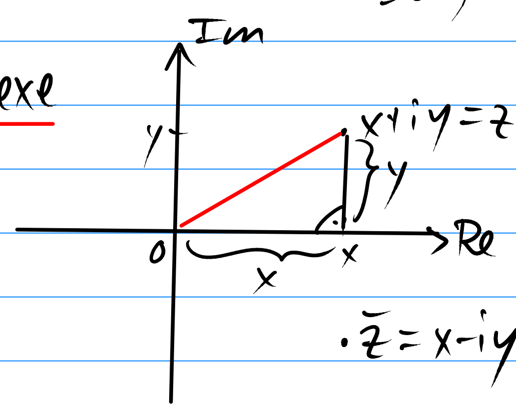
Division: $$\frac{x+iy}{u+iv} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} = \frac{(xu+yv)+i(yu-xv)}{u^2+v^2}$$

$$= \underbrace{\frac{xu+yv}{u^2+v^2}}_{} + i\cdot \underbrace{\frac{yu-xv}{u^2+v^2}}_{}$$

(Beachte: $(u+iv)\cdot(u-iv) = u^2 - i^2 v^2 = u^2+v^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$)

Def.: Die zu $z = x+iy$ <u>konjugiert komplexe</u> Zahl ist

$$\bar{z} = x - iy.$$



Der <u>Betrag</u> von $z = x+iy$ ist

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ (Pythagoras)}$$

Bem.: • $(\mathbb{R},+,\cdot)$ "$\subseteq$" $(\mathbb{C},+,\cdot)$, denn $x \in \mathbb{R} \rightarrow x = x + i\cdot 0 \in \mathbb{C}$

• $\mathbb{C}$ ist <u>vollständig</u>, d.h. Cauchyfolgen sind konvergent

• $\mathbb{C}$ ist <u>nicht anordenbar</u>, d.h. es gibt keine Möglichkeit, die Ordnungsrelation "$\leq$" von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ fortzusetzen, so dass die üblichen Rechengesetze für "$\leq$" immer noch gelten.

(Rechengesetz: $x \le y$ und $a > 0 \Rightarrow a \cdot x \le a \cdot y$ $\quad (*)$)

Bew. (durch Widerspruch): Angenommen, "$\le$" wäre möglich.

Dann wäre $i > 0$ oder $i < 0$.

Wäre $i > 0$, folgte $i \cdot i \underset{\uparrow (*) \text{ da } i>0}{>} 0 \cdot i$, d.h. $-1 > 0$ ↯.

Wäre $i < 0$, folgte $-i > 0$, also $(-i)\cdot(-i) \underset{\uparrow (*) \text{ da } -i>0}{>} 0 \cdot (-i)$,

d.h. $-1 > 0$ ↯. $\square$

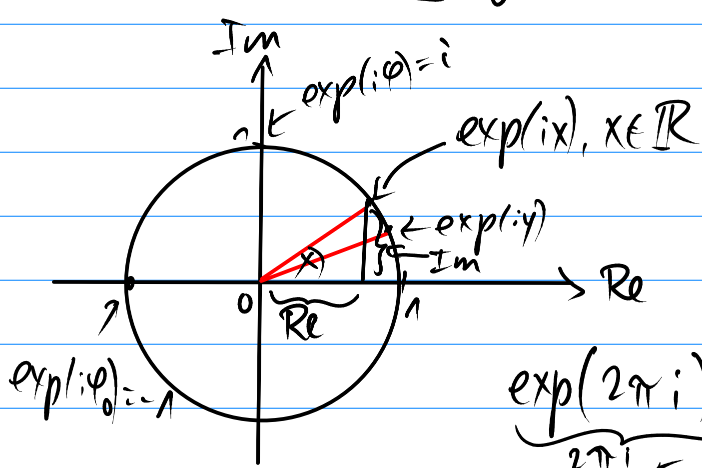
Bem.: $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$

$\rightsquigarrow \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Funktionalgleichung $\underline{\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)}$

ist richtig für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

$$\exp(x+iy) = \underbrace{\exp(x)}_{\in \mathbb{R}_{>0}} \cdot \underbrace{\widetilde{\exp(iy)}}_{\uparrow !?}$$



$$\exp(ix) \cdot \exp(iy) = \exp(i(x+y))$$

$$\underbrace{\exp(2\pi i) = 1}_{e^{2\pi i} = 1} = \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + i \underbrace{\sin(2\pi)}_{0}$$