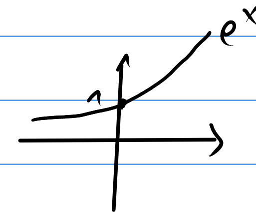
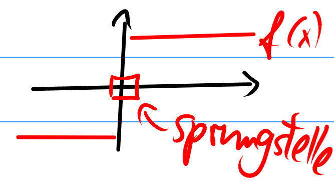
Stetigkeit

Funktionengrenzwerte: z.B. $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 = e^0$.



Nicht immer möglich: $\frac{1}{n} \to 0$, $-\frac{1}{n} \to 0$,
aber für $f(x) := \frac{x}{|x|}$, $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$



gilt $f(\frac{1}{n}) = 1 \to 1$, $f(-\frac{1}{n}) = -1 \to -1$

Def.: Sei $c \in \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ mit $c \in D \subseteq \mathbb{R}$.

- Dann heißt f stetig an der Stelle c,

  falls $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c)$.

- Dann heißt f stetig, falls f an jeder Stelle $c \in D$ stetig ist.

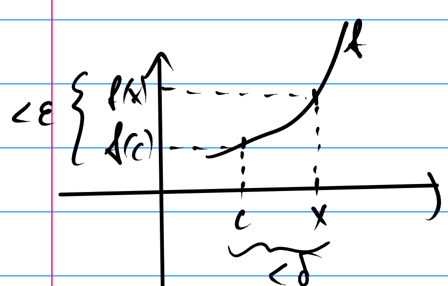
Notation auch: $f(\underbrace{a_n}_{\to c}) \xrightarrow{n\to\infty} f(c)$, $f(c + \underbrace{h_n}_{\to 0}) \xrightarrow{n\to\infty} f(c)$,

$$f(c+h) \xrightarrow{h\to 0} f(c), \quad \lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c).$$

Satz: Sei $c \in \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ mit $c \in D \subseteq \mathbb{R}$.
Dann gilt:

f ist stetig in c $\Leftrightarrow \Big(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D:$

$\underbrace{|x-c| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\Big)$



Bsp.: Beh.: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$ ist stetig.

Bew. (ε-δ-Krit.):

Sei $c\in\mathbb{R}$, sei $\varepsilon>0$, dazu $\delta:=\frac{\varepsilon}{2}$.

Sei $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-c|<\delta$, dann folgt

$$|2x+3-(2c+3)|=|2(x-c)|=2\cdot|x-c|<2\cdot\delta=\varepsilon.$$

$\square$

Stetigkeitssätze: Produkt/Summe/Hintereinanderausführung stetiger Funktionen ist stetig.

Bsp.: $f(x)=x\sqrt{e^{x^2}+1}$ stetig

- $\exp'(x)=\exp(x)$,

da $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \rightsquigarrow \exp'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)'$

$$\overset{\text{glm. Kgz.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!}\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{k!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\underset{\text{Indexversch.}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\exp(x).$$

- $\ln'(x)=\frac{1}{x}$,

da $1=(x)'=(\exp(\ln x))'\overset{\text{Kettenregel}}{=}\exp'(\ln x)\cdot\ln'(x)$

$$=\exp(\ln x)\cdot\ln'(x)=x\cdot\ln'(x)$$

$\Rightarrow \ln'(x)=\frac{1}{x}.$