- Aussagen: $A, B, \ldots$ stehen für einsetzbare (math.) Aussagen

- Seien A, B Aussagen.

A	B	"A und B" $A \wedge B$	"A oder B" $A \vee B$	"nicht A" $\neg A$	"aus A folgt B" $A \Rightarrow B$	
w	w	w	w	f	w	
w	f	f	w	f	f	
f	w	f	w	w	w	"ex falso quodlibet"
f	f	f	f	w	w	

- Merke: $\neg A$ ist wahr, genau wenn A falsch
  $A \wedge B$ ist wahr, genau wenn A und B beide wahr
  $A \vee B$ ist falsch, genau wenn A und B beide falsch

- Bsp.:
  - $A \vee (\neg A)$, $\neg(A \wedge (\neg A))$: immer wahr
  - beliebige, endl. lange Kombinationen möglich:
    $(A \wedge B) \vee (\neg C)$, $(A \vee B) \wedge C, \ldots$
  - $(A \vee B) \wedge (\neg (A \wedge B))$

- Def.: die Aussage $A \Rightarrow B$ steht für $(\neg A) \vee B$ und heißt Implikation bzw. (Schluß)folgerung
  lies: "wenn A, dann B", "aus A folgt B"
  Bsp.: Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.

- ex falso quodlibet: Bsp.: "$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$"
  ist wahr, egal was x ist
  $x=3$: "$3 > 2 \Rightarrow 9 > 4$"
  $x=0$: "$0 > 2 \Rightarrow 0 > 4$" w!
  $x=-3$: "$-3 > 2 \Rightarrow 9 > 4$" w!

$\neg A \lor B$ $\qquad\qquad$ $(A\Rightarrow B)\land(B\Rightarrow A)$

	A	B	$A\Rightarrow B$	$\neg A$	$(\neg A)\lor B$	$B\Rightarrow A$	$A\Leftrightarrow B$
→	w	w	w	f	w	w	w
	w	f	f	f	f	w	f }
	f	w	w	w	w	f	f
→	f	f	w	w	w	w	w

- $\neg$ bindet stärker als $\land$
  $\land$ bindet stärker als $\lor$
  $\lor$ bindet stärker als $\Rightarrow$

- $\underbrace{\underbrace{(\overset{f}{A}\Rightarrow B)}_{w}\Rightarrow \overset{f}{C}}_{f}$ und $\underbrace{\overset{f}{A}\Rightarrow (B\Rightarrow C)}_{w}$ sind verschieden

- Def.: Die Rückrichtung von $A\Rightarrow B$ ist $B\Rightarrow A$
  bzw. $A\Leftarrow B$

  Bsp.: $x^2<4 \Rightarrow x<2$ w
  $\not\Leftarrow$ $\qquad$ $\neg(x<2\Rightarrow x^2<4)$ w
  Rückrichtung: $x<2 \Rightarrow x^2<4$ f
  Bsp.: $x<2 \Leftrightarrow x+2<4$

- Gilt $\underbrace{(A\Rightarrow B)}_{\text{Hinrichtung}}\land\underbrace{(B\Rightarrow A)}_{\text{Rückrichtung}}$ so schreibe $\underbrace{A\Leftrightarrow B}_{\text{Äquivalenz}}$

Merke:
$A\Leftrightarrow B$ ist wahr, genau wenn A und B dieselben Wahrheitswerte besitzen.

- $(A\Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \lor B)$

- Äquivalenzkette: $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow Z$

  $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \wedge (C \Leftrightarrow \ldots) \Rightarrow Z$

  $A \Leftrightarrow Z$

- Bsp.: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

Beweis per Äquivalenzumformung:

$$(A \Rightarrow B) \underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} (\neg A \vee B) \overset{\text{Nr.1}}{\Leftrightarrow} \neg(\underbrace{\neg(\neg A \vee B)}_{})$$

$$\overset{\text{Nr.3}}{\Leftrightarrow} \neg(\neg(\neg A) \wedge \neg B)$$

$$\underset{\text{Nr.1}}{\Leftrightarrow} \neg(A \wedge \neg B)$$

- Schlusskette: $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow \ldots \Rightarrow Z$

  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge \ldots,$

  $A \Rightarrow Z$

- $\underline{A \Rightarrow B}$: Wenn A, dann B.

  Aus A folgt B.

  A ist hinreichend für B.

  B ist notwendig für A.

  A impliziert B.

- $\underline{A \Leftrightarrow B}$: A gilt genau dann, wenn B.

  A gilt dann und nur dann, wenn B.

  A ist notwendig und hinreichend für B.

  B ist notwendig und hinreichend für A.

  A (ist) äquivalent (zu) B.

▸ **Satz:** $\underbrace{A}_{\text{Vor.}} \Rightarrow \underbrace{B}_{\text{Beh.}}$ (manchmal: $A \Leftrightarrow B$)

▸ **Beweis:**
- → direkter Beweis
  - → Induktionsbeweis, s. VK2
  - → Angabe einer Schlusskette
- → indirekter Beweis
  - → Kontrapositionsbeweis
  - → Widerspruchbeweis

Angabe einer Schlusskette: $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_m \Rightarrow B$

von bereits bewiesenen/bekannten Implikationen
$A \Rightarrow C_1,\ C_1 \Rightarrow C_2, \ldots$

▸ **Bsp.:** Satz: Vor.: x reelle Zahl mit $x^2 = 1$
Beh.: $x = 1 \vee x = -1$

Alternativ: Sei x eine reelle Zahl mit $x^2 = 1$, dann ist $x = 1$ oder $x = -1$.

Bew.:
$$\begin{aligned} x^2 = 1 &\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)\cdot(x+1) = 0 \\ &\Rightarrow x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \vee x = -1 . \qquad \square \end{aligned}$$

quod erat demonstrandum = qed
wie zu beweisen war = wzbw

Bsp.: Satz: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$.

Bew.:
$$\begin{aligned} x^2 = 1 &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 . \qquad \square \end{aligned}$$

- indirekter Beweis von $A \Rightarrow B$:

→ Kontrapositionsbeweis:

beweise $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt

Bsp.: Satz: Vor.: $k \in \mathbb{N}$ und 10^k sei nicht durch 4 teilbar.

Beh.: $k = 1$.

Bew. (Kontraposition):

$$k \neq 1 \Rightarrow k \geq 2 \Rightarrow 10^k = 2^k \cdot 5^k = \underbrace{2^2}_{=4} \cdot 2^{\overbrace{k-2}^{\in \mathbb{N}}} \cdot 5^k$$

ist durch 4 teilbar. □

↪ Widerspruchbeweis:

...