- Aussagen: $A, B, \ldots$ stehen für einsetzbare (math.) Aussagen

- Seien A, B Aussagen.

A	B	"A und B" $A \wedge B$	"A oder B" $A \vee B$	"nicht A" $\neg A$	"aus A folgt B" $A \Rightarrow B$
w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	w
f	f	f	f	w	w

} "ex falso quodlibet"

- Merke: $\neg A$ ist wahr, genau wenn A falsch
  $A \wedge B$ ist wahr, genau wenn A und B beide wahr
  $A \vee B$ ist falsch, genau wenn A und B beide falsch

- Bsp.: • $A \vee (\neg A)$, $\neg(A \wedge (\neg A))$: immer wahr
  - beliebige, endl. lange Kombinationen möglich:
    $(A \wedge B) \vee (\neg C)$, $(A \vee B) \wedge C, \ldots$
  - $(A \vee B) \wedge (\neg (A \wedge B))$

- Def.: die Aussage $A \Rightarrow B$ steht für $(\neg A) \vee B$
  und heißt Implikation bzw. (Schluß-)folgerung
  lies: "wenn A, dann B", "aus A folgt B"
  Bsp.: Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.

- ex falso quodlibet: Bsp.: "$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$"
  ist wahr, egal was x ist
  $x=3$: "$3 > 2 \Rightarrow 9 > 4$"
  $x=0$: "$0 > 2 \Rightarrow 0 > 4$" w!
  $x=-3$: "$-3 > 2 \Rightarrow 9 > 4$" w!

$\neg A \vee B$ $\qquad$ $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

	A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
→	w	w	w	f	w	w	w
	w	f	f	f	f	w	f }
	f	w	w	w	w	f	f }
→	f	f	w	w	w	w	w

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
  $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
  $\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow$

- $\underbrace{\underbrace{(\underset{f}{A} \Rightarrow B)}_{w} \Rightarrow \underset{f}{C}}_{f}$ und $\underbrace{\underset{f}{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C)}_{w}$ sind verschieden

- Def.: Die Rückrichtung von $A \Rightarrow B$ ist $B \Rightarrow A$
  bzw. $A \Leftarrow B$

  Bsp.: $x^2 < 4 \Rightarrow x < 2$ w
  $\not\Leftarrow$ $\qquad$ $\neg(x<2 \Rightarrow x^2<4)$ w

  Rückrichtung: $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$ f

  Bsp.: $x<2 \Leftrightarrow x+2<4$

- Gilt $\underbrace{(A \Rightarrow B)}_{\text{Hinrichtung}} \wedge \underbrace{(B \Rightarrow A)}_{\text{Rückrichtung}}$ so schreibe $\underbrace{A \Leftrightarrow B}_{\text{Äquivalenz}}$

Merke:
$A \Leftrightarrow B$ ist wahr, genau wenn A und B dieselben Wahrheitswerte besitzen.

- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

- Äquivalenzkette: $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow Z$

  $(A \Leftrightarrow B) \land (B \Leftrightarrow C) \land (C \Leftrightarrow \ldots) \Leftrightarrow Z$

  $A \Leftrightarrow Z$

- Bsp.: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \land \neg B)$

  Beweis per Äquivalenzumformung:

  $$(A \Rightarrow B) \underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} (\neg A \lor B) \overset{\text{Nr.1}}{\Leftrightarrow} \neg(\underbrace{\neg(\neg A \lor B)})$$

  $$\overset{\text{Nr.3}}{\Leftrightarrow} \neg(\neg(\neg A) \land \neg B)$$

  $$\underset{\text{Nr.1}}{\Leftrightarrow} \neg(A \land \neg B)$$

- Schlusskette: $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow \ldots \Rightarrow Z$

  $(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C) \land (C \Rightarrow D) \land \ldots$

  $A \Rightarrow Z$

- $\underline{A \Rightarrow B}$: Wenn A, dann B.

  Aus A folgt B.

  A ist hinreichend für B.

  B ist notwendig für A.

  A impliziert B.

- $\underline{A \Leftrightarrow B}$: A gilt genau dann, wenn B.

  A gilt dann und nur dann, wenn B.

  A ist notwendig und hinreichend für B.

  B ist notwendig und hinreichend für A.

  A (ist) äquivalent (zu) B.

▸ **Satz:** $\underbrace{A}_{\text{Vor.}} \Rightarrow \underbrace{B}_{\text{Beh.}}$ (manchmal: $A \Leftrightarrow B$)

▸ **Beweis:** → direkter Beweis → Induktionsbeweis, s. VK3
↳ Angabe einer Schlusskette
→ indirekter Beweis → Kontrapositionsbeweis
↘ Widerspruchbeweis

Angabe einer Schlusskette: $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_m \Rightarrow B$

von bereits bewiesenen/bekannten Implikationen

$A \Rightarrow C_1,\ C_1 \Rightarrow C_2, \ldots$

▸ **Bsp.:** Satz: Vor.: x reelle Zahl mit $x^2 = 1$
Beh.: $x = 1 \vee x = -1$

Alternativ: Sei x eine reelle Zahl mit $x^2 = 1$, dann ist $x = 1$ oder $x = -1$.

Bew.: $x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x-1 = 0 \vee x+1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \vee x = -1. \quad \square$$

quod erat demonstrandum = qed
wie zu beweisen war = wzbw

Bsp.: Satz: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$.

Bew.: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1. \quad \square$$

▶ Satz: Ungerade Quadratzahlen sind von
(I) der Form $4m+1$ für $m \in \mathbb{N}_0$.

Vor.: $n \in \mathbb{N}$ sei ungerade Quadratzahl.

Beh.: $n = 4m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$.

Bew.: Sei $n = k^2$ mit k ungerade,
d.h. $k = 2r+1$ mit $r \in \mathbb{N}_0$.
Dann ist $n = (2r+1)^2 = 4r^2 + 4r + 1$
$= 4m+1$ mit $m = r^2 + r$. □

- indirekter Beweis von $A \Rightarrow B$:

→ **Kontrapositionsbeweis:**

beweise $\neg B \Rightarrow \neg A$ direkt

Bsp.: Satz: Vor.: $k \in \mathbb{N}$ und 10^k sei nicht durch 4 teilbar.

(II) Beh.: $k = 1$.

Bew. (Kontraposition):

$$k \neq 1 \Rightarrow k \in \mathbb{N} \vee k \geq 2 \Rightarrow k \in \mathbb{N} \vee 10^k = 2^k \cdot 5^k = \underbrace{2^2}_{=4} \cdot 2^{\overbrace{k-2}^{\in \mathbb{N}}} \cdot 5^k$$

ist durch 4 teilbar. □

$$\left[\begin{matrix} \text{Vor.: } A_1 \wedge A_2 \\ \text{Beh.: } B \end{matrix}\right\} \; A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$$

$$\neg B \Rightarrow (\neg A_1 \vee \neg A_2)$$

Bsp.: Satz: Vor.: $k \in \mathbb{N}$

Beh.: 10^k nicht durch 4 teilbar,

dann ist $k = 1$.

$$\left\} \begin{matrix} \text{Vor.: } A_1 \\ \text{Beh.:} \\ A_2 \Rightarrow B \end{matrix}\right.$$

Bew. (Kontraposition):

$$k \neq 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \left[\text{Vor. } k \in \mathbb{N}\right]}}{\Rightarrow} k \geq 2 \Rightarrow 10^k = 2^k \cdot 5^k = \underbrace{2^2}_{=4} \cdot 2^{\overbrace{k-2}^{\in \mathbb{N}}} \cdot 5^k$$

ist durch 4 teilbar. □

$$\left\} \begin{matrix} \neg B \Rightarrow \neg A_2 \\ \text{mit} \\ \text{Verwend.} \\ \text{von } A_1 \end{matrix}\right.$$

$$(A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B) \overset{!}{\Leftrightarrow} (A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B))$$

$$\left.\begin{matrix} \Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2) \vee B) \Leftrightarrow \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee B \\ \Leftrightarrow \neg A_1 \vee (A_2 \Rightarrow B) \Leftrightarrow A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow B). \end{matrix}\right\}$$

Bsp.: Satz: Vor.: x reelle Zahl } Vor.: $x \in \mathbb{R} \wedge x^2 \neq 1$

Beh.: $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$ } Beh.: $x \neq 1$

Bew. (Kontraposition): Sei $x \in \mathbb{R}$.

Sei $x = 1 \Rightarrow x^2 = x \cdot x = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 1$. ∎

Satz: Vor.: $x \in \mathbb{R}$

Beh.: $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$.

- indirekter Beweis von $A \Rightarrow B$: Widerspruchsbeweis:

Direkter Beweis von $A \wedge \neg B \Rightarrow C$ }
und C ist falsche Aussage
wie z.B. $0 = 1$, $B \wedge \neg B$, ...

- ⌈ist C falsch und $A \wedge \neg B \Rightarrow C$ richtig,
dann folgt, dass $A \wedge \neg B$ falsch,
d.h. $\neg(A \wedge \neg B)$ richtig,
also $\neg A \vee B$ richtig,
also gilt $A \Rightarrow B$. ⌋

- ⌈ist C falsch, folgt aus $A \wedge \neg B \Rightarrow C$ mit Kontraposition
$\underbrace{\neg C}_{w} \Rightarrow \underbrace{\neg(A \wedge \neg B)}_{w}$, also $A \Rightarrow B$
(wie oben). ⌋

Aufschreiben eines Widerspruchsbeweises:

1. Formulierung der Annahme $\neg B$ als "angenommen, B gelte nicht."
2. Formulierung eines direkten Beweises von $A \wedge \neg B \Rightarrow C$, d.h. die Herleitung von C aus der Annahme $\neg B$ und der Voraussetzung A.
3. Feststellung, dass C falsch ist: "Widerspruch", "↯" und somit der Beweis zuende ist "qed", "□".

▸ **Bsp.:** Satz: Vor.: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $x^2 + 2x = 1$. $\}\leftarrow A$

Beh.: Dann ist $x \neq 0$. $\}\leftarrow B$

Bew. (durch Widerspruch):

1.) Angenommen, es sei $x = 0$.

2.) Dann folgt $1 \underset{\text{Vor.}}{=} x^2 + 2x \underset{\overset{\uparrow}{x=0}}{=} 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$,

also folgt $1 = 0$.

3.) Widerspruch! □

Bew. (Kontraposition): $x = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \neq 1$. □

▸ Bsp.: Satz: Vor.: Sei $k > 1$ nat. Zahl und $n = 10^k - 1$.

Beh.: Dann ist n keine Quadratzahl.

Bew. (durch Widerspruch):

1.) Angenommen, n wäre eine Quadratzahl.

2.) Es ist $n = 10^k - 1$ ungerade Quadratzahl.

Nach Satz (I) folgt $n = 4m + 1$ mit $m \in \mathbb{N}_0$.

Also ist $10^k - 1 = 4m + 1$,

also $10^k = 4m + 2$,

also ist 10^k nicht durch 4 teilbar.

Nach Satz (II) folgt, dass $k = 1$.

3.) Dies widerspricht der Vor., dass $k > 1$. □

Bsp.: Satz: Vor.: $Q := \{x \in \mathbb{N} ; \exists y \in \mathbb{N} : x = y^2\}$

Beh.: $Q \cap \{x \in \mathbb{N} ; x < 10\} = \{1, 4, 9\}$.

Bew.: $\supseteq$: $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2 \in Q$ und $1, 4, 9 < 10$.

✓

$\subseteq$: Sei $x \in Q$ und $x < 10$.

Dann ist $x = y^2 < 10$ für ein $y \in \mathbb{N}$,

also $y < \sqrt{10} \approx 3{,}1\ldots$,

also $y \in \{1, 2, 3\}$,

also $x = y^2 \in \{1, 4, 9\}$. $\square$